Қазақстан Республикасының
Білім және ғылым
министрлігі

Министерство
образования и науки
Республики Казахстан

Д. Серікбаев атындағы ШҚМТУ

ВКГТУ им. Д. Серикбаева

БЕКІТЕМІН

Оқу-әістемелік жұмыс
жөніндегі проректор
________________ Н.Н. Линок
«_____»_____________2011ж.

С.Ж Тыныбекова, Ж.Т. Рахметуллина, Ә.Ә. Конырханова

ЫҚТИМАЛДЫҚТАР ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА СҰРАҚТАР МЕН ЕСЕПТЕРДЕ

Оқу құралы

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Өскемен
Усть-Каменогорск
2011

Оқу құралы жоғары математика кафедрасында Қазақстан Республикасының жалпы мемлекеттік білім беру стандарты негізінде барлық техникалық бағыттағы мамандықтардың студенттеріне арналып жасалған.

Оқу құралы жоғары математика құжыра отырысында талқыланған

Құжыра меңгерушісі Н.Г.Хисамиев

Хаттама № ____ ___________ 2011 ж.

Ақпараттық технология және энергетика факультетінің әдістемелік кеңесінде құпталды.

Әдістемелік комиссия төрағасы

Хаттама № ____ ____________ 2011 ж.

Құрастырғандар С.Д. Тыныбекова
Ж.Т.Рахметуллина
Ә.Ә.Қоңырханова

Норма бақылаушы Е.В. Петрова

МАЗМҰНЫ

АЛҒЫ СӨЗ

Қазіргі заман талаптары техникалық мамандықтардағы бакалавриат түлектерін дайындау сапалы болуы үшін математика курсының қолданбалы бағытындағы курстарын күшейтуді және іргелі математикалық дайындықтың деңгейін арттыруды қажет етеді. Осы мақсатпен жоғарғы оқу орындарында математика пәндері бойынша элективті курстар құрастырылып, «Техникалық мамандықтарды математикаландыру» жобасы енгізілуде.

«Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика» пәні техникалық және экономикалық мамандықтар үшін өте қажет математикалық пәндердің бірі болып есептеледі. Ықтималдықтар теориясын техникалық және экономикалық есептерді қазіргі заман жағдайында шешу үшін тәжірибелік берілгендердің ғылыми негізін, яғни, қарастырылып отырған үдерістер мен құбылыстардың математикалық үлгілерін алу және талдаудың математикалық әдістерін пайдаланбай қолдану мүмкін емес. Студенттерді осындай әдіспен оқыту «Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика» пәнінің мақсаты болып табылады. Студенттердің белсенді өзіндік жұмысы пәнді терең меңгеруінің кепілі. Математика пәнінен оқу үрдісін қарқындатудың бір түрі өзіндік үй тапсырмалары (ӨҮТ) мен семестрлік тапсырмалар (СТ) жүйесі болып табылады. Ұсынылып отырған оқу құралы Қазақстан Республикасының мемлекеттік білім стандарты, типтік оқу бағдарламасы негізінде техникалық бағыттағы мамандықтарға арналып жазылған. Оқу құралы үш бөлімнен тұрады. Негізгі теориялық мағлұматтар мен формулалар, өз білімін тексеруге арналған сұрақтар және өзіндік үй тапсырмалары мен оның бір нұсқасының есептерін шығару жолына әдістемелік талдау В.Ф Чудесенконың «Жоғарғы математикадан арнайы курстар бойынша тапсырмалар жинағы» оқу құралы негізге алына отырып берілген.

Жалпы инженерлік және техникалық пәндерден зертханалық жұмыстарды орындаудағы сынақтардың нәтижелерін дұрыс бағалауда студентер үшін оқу құралының үлкен көмегі болмақ.

Оқу құралы жоғарғы оқу орындарының барлық техникалық мамандықтарының студенттеріне арналған.

1 КЕЗДЕЙСОҚ ОҚИҒАЛАР

1.1 Ықтималдықтар теориясы пәні. Негізгі ұғымдар

Ықтималдықтар теориясы – ол кездейсоқ құбылыстардың заңдылықтарын зерттейтін математикалық ғылым саласы.

Ықтималдықтар теориясының негізгі есебі – жалпылай мінездемелі кездейсоқ құбылыстарды зерттеудің математикалық заңдылықтарын құру және оны жеке фактілер негізінде алдын ала көру. Өзімізді қоршаған әлемде біз әртүрлі кездейсоқ құбылыстарға тап боламыз және олардың басым көпшілігі бақылаулар саны өте үлкен болғанда белгілі заңдылықтарға бағынады.

Ықтималдықтар теориясы кездейсоқ құбылыстардың жалпылай қайталануы бағынатын абстрактілі түрдегі заңдылықтарды зерттейді.

Ықтималдықтар теориясы 17 ғасырда құмар ойындар нәтижесінде пайда болған. Қарастырылып отырған кездейсоқ құбылыстың барлық элементар нәтижелерінің жиынын – Ω деп белгілейік және $\Omega \neq \varnothing$ ($\varnothing$ бос жиын). F дегеніміз - Ω-ның оқиғалар (кездейсоқ оқиғалар) деп аталатын барлық ішкі жиындарының жүйесі болсын. Әрбір $\omega \in \Omega$ элементар оқиға деп, ал Ω-ның өзі элементар оқиғалар кеңістігі деп аталады. Егер кездейсоқ тәжірибе (сынақ, құбылыс) нәтижесінде элементар $\omega \in \Omega$ оқиғасы пайда болатын болса және $\omega \in A \in F$ болса, онда тәжірибе нәтижесінде A оқиғасы пайда болды дейді.

Бос жиынмен беттесетін оқиға жалған оқиға деп аталады және былай белгіленеді: V. Немесе жалған оқиға деп берілген шарт бойынша мүлдем орындалмайтын оқиғаны айтамыз. Ал Ω жиынымен беттесетін оқиға ақиқат оқиға деп аталады және оны U арқылы белгілейік. Немесе ақиқат оқиға дегеніміз берілген шарт бойынша сөзсіз орындалатын оқиға. Мысалы, алтыжақты ойын сүйегін лақтырғанда бір ұпайынан кем емес ұпайдың түсуі – ақиқат оқиға.

Ықтималдықтар теориясы статистикалық қорытындылар жасау, сондай-ақ қандай да бір оқиғаның орындалу немесе орындалмауының бақылау сапасын, басқару шешімдерін қабылдау, экономикада инженерлік есептеулерді жүргізу және т.с.с. қоса алғандағы сандық бағасын, негізін құрады.

Ықтималдықтар теориясы пәні жалпылай кездейсоқ оқиғалардың ықтималды заңдылықтарын зерттейді. Ықтималдықтар теориясы әдісі сенімділіктілер теориясында, атқыштар, автоматтық басқаруларда және т.б. кеңінен қолданылады. Ықтималдықтар теориясы өнеркәсіпті жоспарлауда және ұйымдастырудағы технологиялық үрдістерді талдауда қолданылатын математикалық және қолданбалы статистиканың негізі. Зерттеудің ықтималдық немесе статистикалық әдістері қолданылмайтын білім аймағы жоқ деп сенімділікпен айта аламыз. Ықтималдықтар теориясында оқиға ұғымына анықтама беріп көрелік.

Анықтама. Ықтималдықтар теориясында оқиға деп қандай да бір сынақ (тәжірибе) нәтижесінде орындалуы мүмкін қандай да бір фактіні айтамыз.

Сынау нәтижесінде *A* оқиғасының пайда болуы да, болмауы да мүмкін болса, онда *A* – кездейсоқ (мүмкін) оқиға деп аталады.

Мысалы: Атқыш нысанаға оқ атты. Оқтың атылуы – сынақ, ал оның нысанаға тиюі– оқиға. Оқиғаларды былай белгілеуге болады: $A, B, \ldots$

Бірлік кездейсоқ оқиға (жеке тәжірибе нәтижесі) – көбінде есепке алу мүмкін емес өте көп кездейсоқ себептердің салдарлары. Бірақ та, егер жалпылай біртекті оқиғаларды (бірдей мүмкіндіктерде жүргізілген тәжірибелердің бірнеше есе рет бақылануы) қарастыратын болсақ, онда олар белгілі бір заңдылыққа бағынады: бірдей мүмкіндікте тиынды өте көп рет лақтыру нәтижесінде герб жағының түсу саны барлық лақтырыстың санының жартысына тең деп айтсақ, жіберілген қателік үлкен болмас еді.

Анықтама.

- Оқиғалар тең мүмкіндікті оқиғалар деп аталады, егер осы оқиғалардың бірде-біреуінің сынақ нәтижесінде басқаларына қарағанда бұдан басқа ешқандай мүмкіндігі жоқ деп айтуға негіз бар болса.
- *A* және *B* оқиғалары үйлесімді оқиғалар деп аталады, егер олардың біреуінің пайда болуы екіншісінің пайда болуын жоққа шығара алмаса. Кері жағдайда, олар үйлесімсіз оқиғалар деп аталады.
- Оқиғалар тобы үйлесімді деп аталады, егер осы топтың тым болмағанда екі оқиғасы үйлесімді болса, кері жағдайда, олар үйлесімсіз оқиғалар деп аталады.
- Үйлесімсіз оқиғалар тобы толық топ құрады деп айтамыз, егер сынақ нәтижесінде міндетті түрде осы оқиғалардың біреуі және тек біреуі ғана пайда болатын болса.

Мысал 1. Нысанаға үш оқ атылды: A_1 $\left(\overline{A}_1\right)$ - бірінші оқтың нысанаға тиюі (тимеуі), A_2 $\left(\overline{A}_2\right)$ - екінші оқтың нысанаға тиюі (тимеуі), A_3 $\left(\overline{A}_3\right)$ - үшінші оқтың нысанаға тиюі (тимеуі). Онда:

а) A_1, A_2, A_3 - тең мүмкіндікті оқиғалардың үйлесімді тобы.

б) A_1, $\overline{A}_1$ - үйлесімсіз оқиғалардың толық тобы, $\overline{A}_1$ оқиғасы - A_1 оқиғасына қарама-қарсы оқиға.

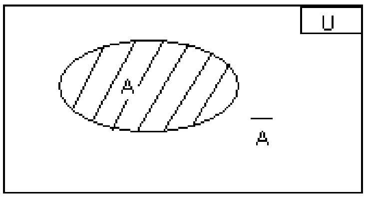
в) A_1, A_2, A_3, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$- оқиғалардың толық тобы.

1.2 Оқиғалар алгебрасы

Оқиғалар *Ω*-ның ішкі жиындары болғандықтан, теориялық – жиындық терминалогияны пайдаланып жаңа оқиғаларды сәйкес жиындардың қосындысы, қиылысуы және толықтауыш жиындары ретінде анықтауға болады. Оқиғалар арасындағы қатыстар мен амалдарды қарастырайық және оның жиындар арасындағы амалдар мен қатыстарға сәйкесінше эквивалентті екенін ескерейік. Анықтама бойынша кез келген *A* оқиғасы элементар оқиғалар кеңістігінің (жиынының) ішкі жиыны.

Анықтама. $\overline{A}$ оқиғасы A оқиғасына *қарама-қарсы оқиға* деп аталады, егер A оқиғасының орындалмауынан $\overline{A}$ -ның орындалатыны және A оқиғасының орындалуынан $\overline{A}$ оқиғасының орындалмайтыны шығатын болса.

Бұл оқиғаны A оқиғасын жоққа шығару оқиғасы деп те айтуға болады (1-сурет, Вьенна диаграммасы)

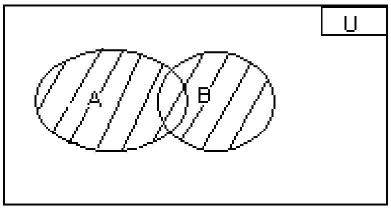


1-сурет

A оқиғасы B оқиғасының құрамында жатады деп айтамыз, егер A оқиғасының пайда болуынан B оқиғасы сөзсіз пайда болатыны шығатын болса: $A\subset B$.

Егер $A\subset B$ және $B\subset A$, онда $A=B$, яғни, А және В оқиғалары эквивалентті оқиғалар деп аталады.

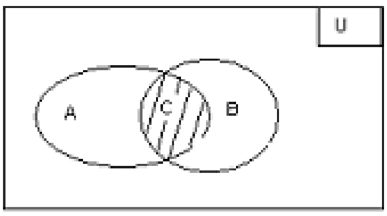
A және B оқиғаларының қосындысы немесе бірігуі деп тым болмағанда біреуі пайда болғанда пайда болатын оқиғаны айтамыз: $C=A+B$ немесе $C=A\cup B$ (2-сурет).



$C=A+B$
немесе A, немесе B,
немесе A және B

2-сурет

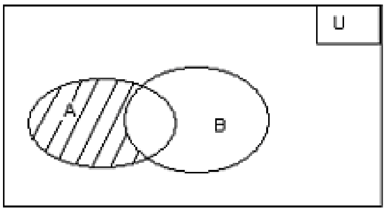
A және B оқиғаларының көбейтіндісі немесе қиылысуы деп олардың бір уақытта бірге пайда болуын айтамыз: $C=A\cdot B$ немесе $C=A\cap B$ (3-сурет).



$C=A\cdot B$
әрі A, әрі B

3-сурет

A және B оқиғаларының айырымы деп A оқиғасы пайда болып, B оқиғасы пайда болмаған кезде пайда болатын оқиғаны айтамыз: $C=A\text{-}B$ или $C=A\backslash B$ (4-сурет).



$C = A \backslash B$

4-сурет

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары толық топ құрса, онда:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U,$$

мұндағы U - ақиқат оқиға.

A және B оқиғалары үйлесімсіз оқиғалар болса, онда:

$$A \cdot B = V,$$

мұндағы V - жалған оқиға.

Оқиғаларды қосу, көбейту және оқиғалардың айырмасы, сондай-ақ, ақиқат, жалған және қарама –қарсы оқиғалардың анықтамаларынан мынадай тепе-теңдіктерді алуға болады:

$$A \cup A = A \qquad A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C \qquad A \cup \overline{A} = U$$

$$A \cap A = A \qquad (A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup B \cap C \qquad A \cap \overline{A} = V$$

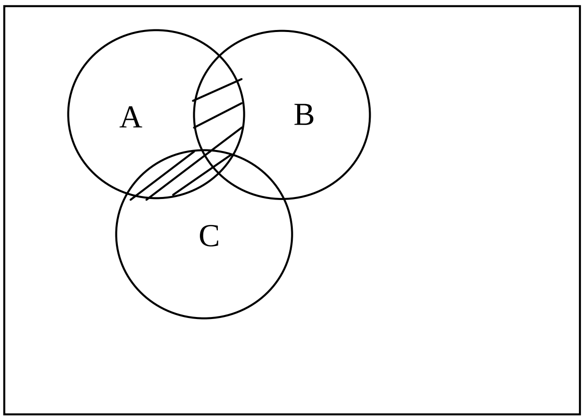
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cup U = U \qquad A \backslash B = A \cap \overline{B}$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup V = A \qquad \overline{\overline{A}} = A$$

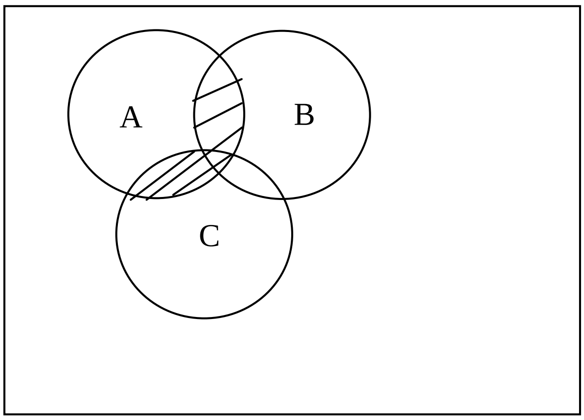
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap U = A \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cap V = V \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Бұл тепе-теңдіктердің басым көпшілігін өз бетімен тексеру қиындық туғызбайды. Геометриялық үлгілерді қолдануды ұсынамыз. $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$ формуласын дәлелдейік.



5а -сурет



5б -сурет

$A \cap (B \cup C)$ оқиғасы A-да и $B \cup C$-да жататын элементар оқиғалардан тұрады, яғни, A оқиғасынан не B мен C оқиғаларының тым болмағанда біреуінен тұратын оқиға. Басқаша айтсақ, $A \cap (B \cup C)$ оқиғасы $A \cap B$ оқиғасына не $A \cap C$ оқиғасына жататын элементар оқиғалардан тұрады, яғни, $A \cap B \cup A \cap C$. Геометриялық тұрғыдан, $A \cap (B \cup C)$ оқиғасы A және $B \cup C$ оқиғаларының ортақ бөлігін құрайды (5а-сурет), ал $A \cap B \cup A \cap C$ оқиғасы $A \cap B$ және $A \cap C$ оқиғаларының бірігуінен тұрады (5б-сурет), яғни, $A \cap (B \cup C)$ облысын көрсетеді.

1.3 Ықтималдықтың классикалық анықтамасы

A оқиғасының $P(A)$ ықтималдығы деп,

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

шамасын айтады, мұндағы m- A оқиғасына қолайлы элементарлық оқиғалар саны, n- тең мүмкіндікті элементарлық оқиғалар кеңістігінің барлық оқиғалар саны.

Мысал 2. Жәшікте 30 зат бар және оның бесеуі жарамсыз. Кездейсоқ алынған бір заттың жарамсыз зат болу ықтималдығын есепте.

Шешуі. Жәшіктен бір-бірден зат алсақ, барлық мүмкін жағдайлар саны $n = 30$. Ал осының ішінде алынған заттың жарамсыз болу жағдайларының саны $m = 5$. Егер A оқиғасы - кездейсоқ алынған бір зат жарамсыз деген оқиға болса, онда оның пайда болуының ықтималдығы былай есептеледі:

$$P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

A оқиғасының қатысты жиілігі деп мынадай шаманы айтамыз:

$$\omega(A) = \frac{m}{n}.$$

мұндағы m дегеніміз - А оқиғасы пайда болатын сынаулар саны, ал n- барлық жүргізілген сынаулар саны.

A оқиғасының статистикалық ықтималдығы деп жүргізілген сынаулардың үлкен санының қатысты жиілігін айтамыз және былай белгілейміз $P^*(A)$. Сонымен,

$$P^*(A) = \lim_{n \to \infty} \omega(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Ұзақ зерттеулер жүргізілген әртүрлі сынауларда n жеткілікті үлкен болған сайын $P^*(A)$-дағы өзгеріс өте аз екенін көрсетеді, яғни статистикалық ықтималдық деп аталатын қандай да бір тұрақты санның маңайында тұрып алады.

Ықтималдықтың қасиеттері:

1. Ақиқат оқиғаның ықтималдығы 1-ге тең.
2. Жалған оқиғаның ықтималдығы 0-ге тең.

3. Кез келген A оқиғасы үшін $0 \le P(A) \le 1$.

1.4 Комбинаториканың негізгі формулалары

Комбинаториканың негізгі принциптерін қарастыралық. Бірінен кейін бірі орындалатын k әрекет жасау қажет болсын. Егер бірінші әрекетті n_1 әдіспен, екінші әрекетті - n_2 әдіспен және т.с.с., k - әрекетті n_k әдіспен орындауға болатын болса, онда барлық k әрекетті $n_1 \times n_2 \times n_3 \times .... \times n_k$ әдіспен орындауға болады. n элементтен тұратын жиын берілсін.

Ω - жиыны n элементтен тұрады. n элементті жиынның k элементтен тұратын ішкі жиыны деп n элементтен k элемент бойынша алынған теруді атайды.

Ішкі жиындағы элементтердің реті аса маңызды емес. Айырмашылықтары тек элементтерінің құрамында болатын әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша құралған топтастыруды *теру* деп атайды және былай есептеледі:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

{a,b,c} жиынының элементтерінен екі элемент бойынша алынған терулер саны: *{a,b},{a,c},{b,c},* яғни, $C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$, ал бір элемент бойынша алынған терулер саны: $\{a\},\{b\},\{c\}$, яғни, $C_3^1 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$.

Теру үшін мынадай формулалар ақиқат:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Мысалы,

$$C_{30}^{28} = C_{30}^2 = \frac{29 \cdot 30}{1 \cdot 2} = 435.$$

$$(p+qx)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^{n-k} q^k x^k$$

теңдігі Ньютон биномы деп аталады. Бұдан, $p = 1,\ qx = 1$ болғанда, мына теңдікті аламыз:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Айырмашылықтары тек элементтерінің орналасу ретінде болатын жиын *алмастыру* деп аталады және былай есептеледі: $P_n = n!$.

{a,b,c} жиыны берілсін. Осы жиынның элементтерінен $P_3 = 3! = 6$ алмастыру құрастыруға болады,яғни:

$$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),$$
$$(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a).$$

Орналастыру деп айырмашылықтары не элементтерінің құрамында, не элементтерінің орналасу ретінде болатын әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша құралған топтастыруды айтамыз және мынадай формула бойынша есептейміз:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

{a,b,c} жиыны берілсін. Осы жиынның элементтерінен екі элементтен тұратын *{a,b},{a,c},{b,c},{b,a},{c,a},{c,b}* немесе $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ орналастыру жасауға болады.

Мысал 3. Барлық жеті орынды телефон нөмірлерінің санын тап, егер бірде-бір цифр екінші рет қайталанбаса.

Шешуі. Бұл есепте кез келген екі цифрдың орнын ауыстырсақ, басқа телефон нөмірі шығады, яғни, орналасу реті ескеріледі. Ендеше, бұл 10 элементтен жеті элемент бойынша алынған орналастыру: $A_{10}^7 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800$.

Мысал 4. Әртүрлі сегіз хатты әртүрлі сегіз конверттке неше тәсілмен салуға болады, егер бір конвертке тек бір ғана хат салу керек болса?

Шешуі. $P_8 = 8! = 40320$.

Мысал 5. Спорт алаңында 12 адам ойнап жүр. Бұлардың ішінен жарысқа қатысатын төрт адамнан тұратын команданы неше тәсілмен алуға болады?

Шешуі. Орналасу реті ескерілмейді, яғни, төрт адамнан алынған команданың ішіндегі адамдардың орнын қанша ауыстырсақ та, бұл бір ғана команда болады. Ендеше, бұл теру: $C_{12}^4 = 495$.

$k_1, k_2, ..., k_m$ $-$теріс немесе бүтін сандар және $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$ болсын. n элементтен тұратын A жиыны құрамында $k_1, k_2, ..., k_m$ сәйкес элементтері бар $A_1, A_2, ..., A_m$ жиындарының қосындысы түрінде берілсін. Онда әр топтан сәйкес $k_1, k_2, ..., k_m$ элементтерді теру формуласы:

$$C_n(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_m!}.$$

n элементтен тұратын A жиыны құрамында $n_1, n_2, ..., n_k$ сәйкес элементтері бар $A_1, A_2, ..., A_k$ жиындарының қосындысы түрінде берілсін және $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. B жиыны - A жиынының m элементті ішкі жиыны: A_1 жиынынан m_1 элемент, A_2 жиынынан m_2 элемент, т.с.с. A_k жиынынан m_k элемент алынған $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i = m\right)$. B жиынын - A жиынынан таңдап алудың саны комбинаториканың негізгі принципіне сәйкес

$$C_{n_1}^{m_1} \times C_{n_2}^{m_2} \times ... \times C_{n_k}^{m_k}.$$

формуласымен есептеледі.

Әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша қайталаумен алынған орналастыру $\overline{A}_n^k = n^k$ формуласымен есептеледі.

{a,b,c} жиыны берілсін. Осы жиынның элементтерінен екі элементтен тұратын қайталаумен алынған орналастыру: *{a,b}, {a,c}, {b,c}, {b,a}, {c,a}, {c,b}, {a,a},{b,b},{c,c}*, немесе $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

n элементтен құрамында бір типті заттан n_1 зат бар, басқа типті заттан n_2 зат бар, және т.с.с. k типті заттан n_k зат бар, мұндағы $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, алынған қайталанбалы алмастыру мынадай формула бойынша есептелінеді:

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... n_k!}.$$

Әртүрлі n элементтің ішінен k элемент бойынша қайталаумен алынған теру:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$$

формуласымен есептеледі.

Мысал 6. Алты қабатты үйдің бірінші қабатынан үш адам лифтыға отырды. Олардың әрқайсысы бірдей ықтималдықпен, бір-біріне тәуелсіз екінші қабаттан бастап түсе алады. Қабаттарда түсудің әртүрлі барлық жағдайлары қанша?

Шешуі. Олардың барлығы екінші қабаттан бастап бір қабатта түсуі мүмкін: яғни, 2,2,2. Немесе мынадай жағдай болуы мүмкін: 2,2,5. Ендеше, біз 2,3,4,5,6 цифрларынан цифрлары қайталанатын үштаңбалы әртүрлі қанша сан құра аламыз, соны табуымыз қажет:

$$\overline{A}_5^3 = 5^3 = 125.$$

Мысал 7. Бірдей он карточкаға М,А,Т,Е,М,А,Т,И,К,А әріптері жазылған. Жақсылап араластырылғаннан кейін кездейсоқ бір-бірден карточкалар алынып, алыну ретімен стол үстіне қойылды. Осы әріптерден әртүрлі барлығы қанша сөз құрауға болады?

Шешуі. Кейбір әріптер қайталанып тұр, әрі он әріптен он әріптен тұратын сөз жазуымыз қажет, онда ол қайталанбалы алмастыру болады:

$$\overline{P}_{10}(2,3,2) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151200$$

Мысал 8. Дүкенде үш түрлі тәтті тоқаштар бар: наполеон, эклер, қаттама. Кездейсоқ тоғыз тәтті тоқашты неше тәсілмен сатып алуға болады?

Шешуі.

$$\overline{C}_3^9 = 55.$$

Мысал 9 . Шахмат турнирына 10 гроссмейстер, 6 әлемдік шебер және 4 жай шебер қатысады. Бірінші турдың шахматшылары мен әрбір қатысушы жұптардың стол нөмірі жеребе тастау арқылы анықталады. Бірінші столда бірдей категориялы шахматшылар кезігу ықтималдығын тап.

Шешуі. 20 ойын қатысушыларынан екі бәсекелесті таңдап алудың барлық теңмүмкіндікті жағдайлар саны C_{20}^2; 10 гроссмейстерден екі адамның алынуының барлық барлық мүмкін жағдайлар саны C_{10}^2; 6 әлемдік шеберден екі адамнан алынудың барлық мүмкін жағдайлар саны C_6^2 және 4 шеберден құралатын жұптардың барлық мүмкін саны C_4^2. Бірінші столда бірдей категориялы шахматшылардың кезігуінің қолайлы жағдайлар саны $C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2$. Сонымен, ізделінді ықтималдық:

$$p = \frac{C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{33}{95}.$$

1.5 Геометриялық ықтималдықтар

Қандай да бір сынақ нәтижесінде Ω облысына лақтырылған нүктенің $\omega \subset \Omega$ облысына түсу ықтималдығын қалай табу қажеттігі туындасын дейік.

A нүктесінің $\omega \subset \Omega$ облысына түсу ықтималдығы:

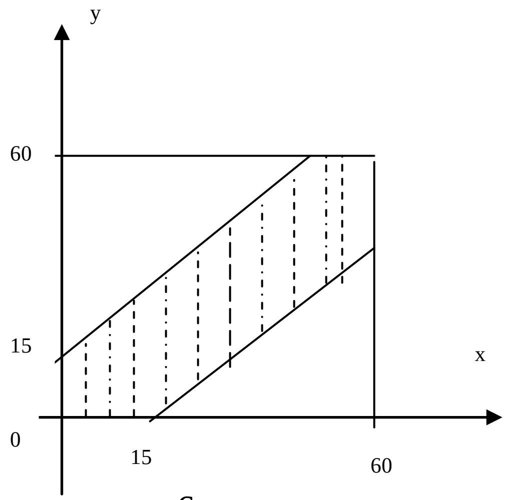
$$P(A) = \frac{m(\omega)}{m(\Omega)},$$

мұндағы $m(\omega), m(\Omega)$- сәйкес облыстардың өлшемдері, *геометриялық ықтималдық* деп аталады.

Өлшем деп ұзындық, аудан, көлем т.с.с. ұғымдарды түсінуге болады.

Мысал 10. Екі адам *A* және *B* белгілі жерде сағат 17 мен 18 арасында кездесуге келісті. Бірінші келгені екіншісін 15 минут тосады да, одан кейін жүре береді. Олардың кездесуге келу уақыттары бір-біріне тәуелсіз және көрсетілген уақыт аралығында бірдей мүмкіндікті болса, олардың кезігу ықтималдығын есепте.

Шешуі. x дегеніміз – *A*-ның келу уақыты және y - дегеніміз – *B*-ның келу уақыты. Барлық мүмкін оқиғалар облысы (элементар оқиғалар кеңістігі) ауданы 60^2 болатын шаршы (6-сурет). $|x-y| \le 15$ теңсіздігі орындалғанда, олар кездеседі. Сонымен, олардың кезігуінің барлық элементар жиынтығы $x - y = 15$ және $x - y = -15$ түзулері арасында жатады. Оның ауданы $S_1 = 60^2 - (60-15)^2$. Геометриялық ықтималдықтың формуласы бойынша



6-сурет

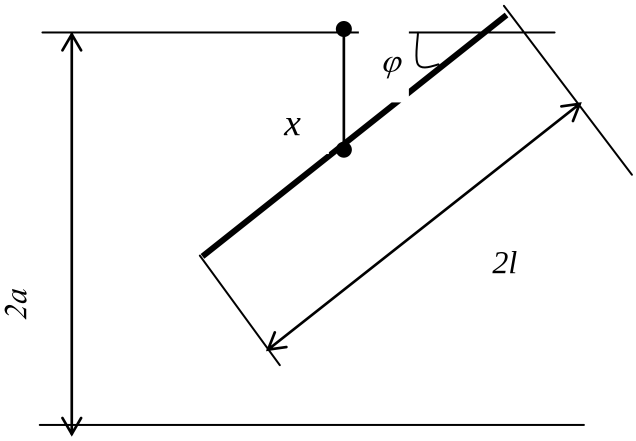
$$P = \frac{S_1}{S} = \frac{60^2 - (60-15)^2}{60^2} = \frac{7}{16} = 0,4375.$$

Сонымен, ізделінді ықтималдық $P = 0,4375$.

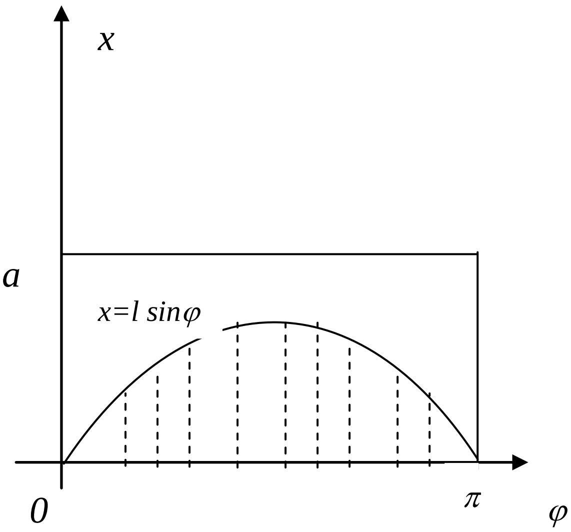
Мысал 11. Бюффон есебі (XVIII ғ. француздың табиғат зерттеушісі) Жазықтық бір-бірінен $2a$ арақашықтықта орналасқан параллель түзулермен жолақтарға бөлінген. Жазықтыққа кездейсоқ ұзындығы $2l$ $(l < a)$ ине лақтырылған. Иненің бірде-бір түзуді қимау ықтималдығын тап.

Шешуі. Мынадай белгілеулер енгіземіз: x дегеніміз – иненің ортасынан жақын параллельге (түзуге) дейінгі ара қашықтық; φ дегеніміз –иненің осы параллельмен жасаған бұрышы (7а-сурет).

Иненің орналасуы x и φ мәндерімен толығымен анықталады, әрі x-тің қабылдайтын мәндері 0-ден a-ға дейін; φ-дің қабылдайтын мүмкін мәндері 0-ден π-ге дейін. Басқаша айтсақ, иненің ортасы қабырғалары a және π болатын тіктөртбұрыштың кез келген нүктесіне түсуі мүмкін (7б-сурет). Сонымен, тіктөртбұрышты иненің ортасы түсуі мүмкін барлық жағдайларды қамтитын облыс ретінде қарастыра аламыз және оның ауданы πa.



7а-сурет



7б-сурет

Иненің орналасуы x и φ мәндерімен толығымен анықталады, әрі x-тің қабылдайтын мәндері 0-ден a-ға дейін; φ-дің қабылдайтын мүмкін мәндері 0-ден π-ге дейін. Басқаша айтсақ, иненің ортасы қабырғалары a және π болатын тіктөртбұрыштың кез келген нүктесіне түсуі мүмкін (7б-сурет). Сонымен, тіктөртбұрышты иненің ортасы түсуі мүмкін барлық жағдайларды қамтитын облыс ретінде қарастыра аламыз және оның ауданы πa.

Иненің бірде-бір түзуді қимайтын жағдайды қанағаттандыратын облысты табайық. 7а-суреті бойынша ине жақын параллельді қию шарты $x \le l\, sin\varphi$, яғни, иненің ортасы 7б-суреттегі штрихталған облысқа түсуі қажет.

Сонымен, ол облыстың ауданы:

$$S = \int_0^{\pi} l\, sin\varphi\, d\varphi = -l\, cos\, \varphi \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

Ізделінді ықтималдық:

$$P = \frac{S_{штрих}}{S_{т}} = \frac{2l}{\pi a}.$$

1.6 Ықтималдықтардың қосу және көбейту теоремалары

1-мысалға қайта оралсақ, $B = A_1 + A_2 + A_3$ оқиғасы – атылған үш оқтың тым болмағанда біреуінің тию ықтималдығы, $C = A_1 A_2 \overline{A}_3$ оқиғасы - атылған үш оқтың бірінші мен екіншісінің тиюі және үшіншісінің тимеуі.

$D = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$ - тура бір оқтың тиюі.

$E = A_1 A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$ - екіден кем емес оқтың тиюі.

Екі оқиға тәуелсіз (тәуелді) оқиға деп аталады, егер олардың біреуінің пайда болуының ықтималдығы екіншісінің пайда болуына тәуелсіз (тәуелді) болса.

Бірнеше оқиғалар *жинағы бойынша тәуелсіз* деп аталады, егер олардың әрқайсысы мен оның қалғандары арқылы жасалынған кез келген сызықтық комбинациясы тәуелсіз оқиғалар болса.

B оқиғасының A оқиғасы орындалғандағы шартты ықтималдығы деп A оқиғасы орындалғаны белгілі деп табылған B оқиғасының ықтималдығын айтамыз және оны былай белгілейміз: $P_A(B)$ $[P(B/A)]$.

B оқиғасының A оқиғасы орындалғандағы шартты ықтималдығы деп

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

теңдігімен анықталған санды айтады.

Бұл анықтамадан ықтималдықтардың көбейтіндісінің екі оқиға жағдайындағы формуласы шығады:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

Теорема 1. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының тым болмағанда біреуінің пайда болу ықтималдығы:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \ldots - P(A_{n-1} A_n) +$$
$$+ P(A_1 A_2 A_3) + \ldots + P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n).$$

Салдар1 . Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары өзара үйлесімсіз болса, онда

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Шынында да, бұл жағдайда: $P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = \ldots = P(A_1 A_2 \ldots A_n) = 0.$

Мысал 12. Нысанаға үш оқ атылды. Бірінші оқтың нысанаға тию ықтималдығы - $0,6$, екінші оқ үшін бұл ықтималдық - $0,7$, ал үшінші оқ үшін - $0,8$. Тым болмағанда бір оқтың нысанаға тию ықтималдығын тап.

Шешуі. A- бірінші оқ нысанаға тиді, B- екінші оқ нысанаға тиді, C- үшінші оқ нысанаға тиді деген оқиғалар, ал D- осы үш оқтың тым болмағанда біреуі нысанаға тиді деген оқиға болсын. Онда $D = A + B + C$, мұндағы A, B, C- үйлесімді жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар. Ендеше,

$$P(D)=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)\cdot P(B)-P(A)\cdot P(C)-P(B)\cdot P(C)+P(A)+P(B)+P(C)=0{,}976.$$

Теорема 2. Өзара үйлесімсіз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары оқиғалардың толық тобын құрайтын болса, онда

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Мысал 13. Институт бақылау жұмыстарының пакеттерін үш қаладан алады. Пакетті бірінші және екінші қаладан алу ықтималдығы сәйкесінше 0,7 және 0,2-ге тең. Пакетті үшінші қаладан алу ықтималдығын тап.

Шешуі. $A,\ B, C$ арқылы институт бақылау жұмыстарының пакеттерін алатын қалаларды белгілейік. Бұл оқиғалар оқиғалардың толық тобын құрайды, сондықтан $P(A)+P(B)+P(C)=1$. Ендеше, ізделінді ықтималдық:

$$P(B)=1-0{,}7-0{,}2=0{,}1.$$

Салдар 2. Қарама-қарсы оқиғалар үшін:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \Rightarrow P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Мысал 14. Күннің жаңбырлы болуының ықтималдығы 0,7-ге тең. Күннің ашық болу ықтималдығын тап.

Шешуі. «Күн жаңбырлы» және «күн ашық» деген оқиғалар қарама-қарсы оқиғалар. Ендеше, күннің ашық болу ықтималдығы $p=1-0{,}7=0{,}3$.

Кей жағдайларда, есеп шарты бойынша тым болмағанда бір оқиғаның орындалу ықтималдығын табу қажет болса, онда осы оқиғаға қарама-қарсы оқиғаның ықтималдығын тауып, 2-салдар бойынша есептеу есептеуді біршама жеңілдетеді. Жоғарыдағы 12-мысалға қайта оралсақ, $\overline{D}=\vec{A}\overline{B}\overline{C}$ - үш оқтың да нысанаға тимеуі. $A,\ B,\ C$ оқиғалары жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар және

$$P(\overline{A})=1-0{,}6=0{,}4,\quad P(\overline{B})=0{,}3,\quad P(\overline{C})=0{,}2$$

болғандықтан,

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})=1-0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}976.$$

Салдар 3. Өзара тәуелсіз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының тым болмағанда біреуінің нысанаға тию ықтималдығы былай есептеледі:

$$P(A)=P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n, \quad (1)$$

мұндағы q_i дегеніміз - $\overline{A_i}$ оқиғасының пайда болуының ықтималдығы, $i=\overline{1,n}$. Яғни, $q_i=P(\overline{A_i})$.

Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғаларының пайда болуларының ықтималдықтары өзара тең және p-ға тең болса, онда (1) формуласын былай жаза аламыз: $P(A)=1-q^n$, мұндағы $q=1-p$.

Мысал 15. Жәшікте N зат бар, оның M-ы сапалы заттар. Алынған кез келген k заттың ішінде тым болмағанда бір сапалы зат болу ықтималдығын тап.

Шешуі. A оқиғасы - алынған заттардың ішінде тым болмағанда бір сапалы зат бар деген оқиға, ал $\bar{A}$ – алынған заттардың ішінде бірде-бір сапалы зат жоқ деген оқиға болсын. Бұл оқиғалар өзара қарама-қарсы оқиғалар. $P(A)=1-P(\overline{A})$ екені белгілі. $P(\overline{A})$ ықтималдығы классикалық ықтималдықтың формуласы бойынша: $P(A)=\dfrac{m}{n}$, мұндағы $m=C_{N-M}^{k}$, $n=C_{N}^{k}$. Онда ізделінді ықтималдық:

$$p(A)=1-\frac{C_{N-M}^{k}}{C_{N}^{k}}.$$

Бірнеше оқиғалардың бір уақытта пайда болуының (көбейту) ықтималдығы:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n) \qquad (2)$$

формуласы бойынша есептелінеді, мұндағы $P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$ дегеніміз - $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ оқиғалары орындалғаны белгілі болғандағы A_n оқиғасының ықтималдығы.

Салдар 4. Егер $A_1, A_2, \ldots, A_n$ оқиғалары қос – қостан тәуелсіз оқиғалар жиыны болса, онда

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n), \qquad (3)$$

себебі $P_{A_1}(A_2)=P(A_2)$, $P_{A_1A_2}(A_3)=P(A_3),\ldots,P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)=P(A_n)$.

Мысал 16. Жәшікте 5 ақ, 4 қара және 3 көк шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Алынған бірінші шардың ақ (A), екінші шардың қара (B), үшінші шардың көк болу *(C)* ықтималдығын тап, егер әрбір алынған шар қайта жәшікке салынғаннан кейін ғана, келесі шар алынған болса.

Шешуі. Есеп шарты бойынша A, B, C оқиғалары - жинағы бойынша тәуелсіз оқиғалар, онда (3) формуласы бойынша:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{5}{144}.$$

Мысал 17. Жәшікте 5 ақ, 4 қара және 3 көк шарлар бар. Жәшіктен бір шар алынды. Алынған бірінші шардың ақ (A), екінші шардың қара (B), үшінші шардың көк болу *(C)* ықтималдығын тап, егер әрбір алынған шар қайта жәшікке салынбаса.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $P(A)=\dfrac{5}{12}$, $P_A(B)=\dfrac{4}{11}$- жәшікте бірінші шар алынғаннан кейін 11 шар қалды, бірақ жәшіктегі қара шардың саны өзгерген жоқ. Келесі шар алынғаннан кейін барлығы 10 шар қалды және жәшіктегі көк шардың саны өзгерген жоқ: $P_{AB}(C)=\dfrac{3}{10}$. Бұдан:

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}.$$

Мысал 18. Үлкен жарнамалық кәсіпорында жұмысшылардың 21%-і жоғарғы еңбек ақысын алады. Сонымен қатар, бұл кәсіпорында жұмыс істейтіндердің 40%- і әйел адамдар, оның ішінде 6,4 % әйел адам жоғарғы еңбек ақысын алатыны белгілі. Кәсіпорында еңбек ақысын төлеуде әйел адамдардың дискриминациясы бар деген тұжырым айта аламыз ба?

Шешуі. Бұл есептің шешуін ықтималдықтар теориясының тіліне аударсақ: «Кездейсоқ алынған адам жоғарғы еңбек ақысын алатын әйел адам болу ықтималдығын тап?». A оқиғасы – «кездейсоқ алынған жұмысшы жоғарғы еңбек ақысын алатын адам», B оқиғасы– «кездейсоқ алынған жұмысшы – әйел адам» деген оқиға болса, онда:

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0{,}064}{0{,}40} = 0{,}16.$$

0,16 саны 0,21-ден аз болғандықтан, мынадай қорытынды жасай аламыз: «кәсіпорында жұмыс істейтін әйел адамдардың ер адамдарға қарағанда жоғарғы еңбек ақысын алу мүмкіндігі аз».

Мысал 19. Студент емтиханда келетін 25 сұрақтың 20-сын ғана біледі. Емтихан алушы студентке үш сұрақ қойды. Студенттің барлық сұраққа жауап беру ықтималдығын тап.

Шешуі. A оқиғасы – «студент барлық үш сұраққа жауап берді»; A_1 - «студент бірінші сұрақты біледі»; A_2 – «студент екінші сұрақты біледі»; A_3 – «студент үшінші сұрақты біледі». A_1, A_2, A_3 оқиғалары тәуелді болғандықтан, (2) формуласы бойынша:

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3).$$

Онда $P(A) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23} = 0{,}496$.

1.7 Толық ықтималдық формуласы. Байес формуласы

Теорема 3 (толық ықтималдықтар формуласы). Егер A оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құратын $B_1, B_2, ..., B_n$ оқиғаларының (болжамдарының) біреуі пайда болғанда орындалатын оқиға болса, онда A оқиғасының орындалу ықтималдығы мынадай формуламен анықталады:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A).$$

Теорема 4 (Байес формуласы). A оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құратын $B_1, B_2, ..., B_n$ оқиғаларының (болжамдарының) біреуі пайда болғанда орындалатын оқиға болсын. Онда A оқиғасы орындалғаны белгілі болғандағы, B_k болжамының орындалу ықтималдығы мынадай формуламен анықталады:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k)P_{B_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}, \quad k = 1,2,...,n.$$

Бұл формула осы формуланы қорытып шығарған ағылшын математигі Байестің есімімен аталған. Формула 1764 ж. жарияланған.

Тәжірибеге дейінгі $P(B_i)$ықтималдықтары априорлы ықтималдықтар, ал тәжірибеден кейінгі $P_A(B_i)$ ықтималдықтары апостериорлы ықтималдықтар деп аталады.

Мысал 20. Цехта өнімділігі бірдей үш түрлі станок бірдей заттар жасап шығарады. Бірінші түрдегі станоктың сапалы зат шығару ықтималдығы - 0,94, екінші түрдегі станок үшін бұл ықтималдық - 0,9, ал үшінші түрдегі станок үшін - 0,85-ке тең. Жәшікте 10 зат жатыр, оның бесеуі бірінші түрдегі станокпен, үшеуі екінші түрдегі станокпен, ал қалған екеуі үшінші түрдегі станокпен жасалған. Жәшіктен кез келген бір зат алынды. Алынған заттың сапалы болу ықтималдығын тап.

Шешуі. A - жәшіктен алынған зат сапалы деген оқиға болсын. Онда болжамдар: B_1- зат бірінші түрдегі станокпен жасалған, B_2- зат екінші түрдегі станокпен жасалған, B_3- зат үшінші түрдегі станокпен жасалған деген оқиғалар. Есеп шарты бойынша: $P(B_1)=\frac{5}{10}$, $P(B_2)=\frac{3}{10}$, $P(B_3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Егер зат бірінші түрдегі станокпен жасалғаны белгілі болса, онда оның сапалы болу ықтималдығы: $P_{B_1}(A)=0{,}94$. Дәл солай, $P_{B_2}(A)=0{,}9$, $P_{B_3}(A)=0{,}85$. Ендеше, толық ықтималдықтың формуласын қолдансақ, жәшіктен алынған заттың сапалы болу ықтималдығы:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}94+\frac{3}{10}\cdot 0{,}9+\frac{1}{5}\cdot 0{,}85=0{,}91.$$

Мысал 21. Қандай да бір ұжымның келесі жылы елдің экономикасының дамуы жоғарғы деңгейде болса акциясының өсу ықтималдығы 0,75-ке тең; ал егер елдің экономикасы төмендейтін болса бұл ықтималдық 0,3-ке тең. Экономисттердің болжамы бойынша келесі жылы елдің экономикасының өсуінің ықтималдығы 0,8. Экономисттердің болжамы ақиқат болса, онда келесі жылы ұжымның акциясының бағасының өсу ықтималдығын тап.

Шешуі. A оқиғасы– «келесі жылы ұжымның акциясының бағасы өседі» деген оқиға болсын. Жұмыстық кестесін құралық:

B_i	Болжамдар B_i	$P(B_i)$	$P_{B_i}(A)$	$P(B_i)P_{B_i}(A)$
1	B_1 – «экономиканың өсуі»	0,8	0,75	0,6
2	B_2 - «экономиканың төмендеуі»	0,2	0,3	0,06
$\sum$		1	–	$P(A)$ = 0,66

Сонымен, келесі жылы ұжымның акциясының бағасының өсу ықтималдығы 66%.

Мысал 22. Екі жәшіктің әрқайсысында 6 қара және 4 ақ шарлар бар. Бірінші жәшіктен екінші жәшікке бір шар салынды. Одан кейін екінші жәшіктен бір шар алынды. Алынған шардың қара болу ықтималдығын тап.

Шешуі. A оқиғасы – «екінші жәшіктен алынған шар қара» деген оқиға болсын. Жұмыстық кестесін құралық:

B_i	Болжамдар B_i	$P(B_i)$	$P_{B_i}(A)$	$P(B_i)P_{B_i}(A)$
1	B_1– «бірінші жәшіктен екінші жәшікке салынған шар қара»	6/10	7/11	42/110
2	B_2 – «бірінші жәшіктен екінші жәшікке салынған шар ақ»	4/10	6/11	24/110
$\sum$		1	–	*P(A)* = 0,6

Мысал 23. Жоғарыдағы 20-мысалда алынған заттың сапалы екені белгілі болсын. Осы алынған заттың екінші түрдегі станокпен жасалу ықтималдығы неге тең $[P_A(B_2)=?]$.

Шешуі. $P(B_2)=\dfrac{3}{10}$ - болжамның A оқиғасы орындалғанға дейінгі ықтималдығы, $P_A(B_2)$ - A оқиғасы орындалғаннан кейінгі ықтималдығы. Байес формуласын қолдансақ:

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(B_i)P_{B_i}(A)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot 0{,}9}{0{,}91}\approx 0{,}297.$$

Мысал 24. Экономикалық өсім жоғары болған аралықта америкалық доллардың өсу ықтималдығы 0,7, ал экономикалық өсім төмен болған жағдайда доллардың өсу ықтималдығы 0,4, және экономикалық өсім өте төмен болған жағдайда доллардың өсу ықтималдығы 0,2. Кез келген уақыт аралығында экономикалық өсімнің жоғары болу ықтималдығы 0,3, экономикалық өсімнің қалыпты болу ықтималдығы – 0,5 және өте төмен болу ықтималдығы – 0,2. Ағымдық уақытта доллар қымбаттағаны белгілі болса, бұл аралықтың экономикалық өсімнің жоғары болу аралығымен сай келу ықтималдығын тап?

Шешуі. Болжамдар: B_1- «экономикалық өсім жоғары»; B_2- «экономикалық өсім қалыпты»; B_3 – «экономикалық өсім төмен».

A оқиғасы – «доллар өседі» деген оқиға болсын. Онда:

$P(B_1)$ = 0,3; $P(B_2)$ = 0,5; $P(B_3)$ = 0,2;

$P_{B_1}(A)=0{,}7; P_{B_2}(A)=0{,}4; P_{B_3}(A)=0{,}2$.

$P_A(B_1)$ ықтималдығын тап.

Байес формуласын қолданамыз : $P_A(B_1)=\dfrac{0{,}3\cdot 0{,}7}{0{,}3\cdot 0{,}7+0{,}5\cdot 0{,}4+0{,}2\cdot 0{,}2}=0{,}467$.

Кесте көмегімен де осындай нәтиже аламыз:

Болжамдар B_i	Априорлы ықтималдық-тар $P(B_i)$	Шартты ықтимал-дықтар $P_{B_i}(A)$	Үйлесімді ықтималдық-тар $P(A \cap B_i)$	Апостериорлы ықтималдықтар $P_A(B_i)$
B_1	0,30	0,70	0,21	0,21/0,45 = 0,467
B_2	0,50	0,40	0,20	0,20/0,45 = 0,444
B_3	0,20	0,20	0,04	0,04/0,45 = 0,089
Қосынды	1,00	–	0,45	1

1.8 Тәуелсіз сынақтардың қайталануы.

Нәтижелерінде тәуелсіз оқиғалар пайда болатын сынақтарды тәуелсіз сынақтар деп атайды. Тәуелсіз n сынақ жүргізілген. Осы сынақтардың әрқайсысында A оқиғасының пайда болу ықтималдықтары бірдей және тұрақты p-ға тең (пайда болмауы $q=1-p$) болсын. Онда осы тәуелсіз n сынақ жүргізу нәтижесінде A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы Бернулли формуласымен есептеледі:

$$P_n(k)=C_n^k \cdot p^k(1-p)^{n-k}.$$

$p+q=1$ екенін ескере отырып, оның екі жағын да n дәрежелеп: $(p+q)^n=1$, Ньютон формуласын қолданып,

$$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+...+P_n(k)+...+P_n(n)=1$$

биномдық қатарды алуға болады.

Ықтималдықтың ең үлкен мән қабылдайтын $k=k_0$ мәнін *ең ықтималды сан* деп атаймыз. Егер $(n+1)p-$ бүтін сан болса, онда екі мән болады: $k_0=(n+1)p-1$ және $k_0=(n+1)p$. Егер $(n+1)p$ - бөлшек сан болса, онда $k_0=[(n+1)p]$, мұндағы $[\dots]$ белгісі – санның бүтін бөлігі дегенді көрсетеді.

n тәуелсіз сынақ жүргізу нәтижесінде өзара тәуелсіз $A_1, A_2, ..., A_k$ оқиғалары сәйкес $p_1, p_2, ..., p_k$ ықтималдықтарымен сәйкесінше $m_1, m_2, ..., m_k$ рет пайда болсын дейік, мұндағы $p_1+p_2+...+p_k=1$.

A_1 оқиғасының m_1 рет, A_2 оқиғасының m_2 рет, ..., A_k оқиғасының m_k рет пайда болу ықтималдығы, әрі $m_1+m_2+...+m_k=n$, мынадай формула бойынша есептелінеді:

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k)=\frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_n^{m_k}.$$

Бұл ықтималдықтың полиномдық үлестірімі.

n үлкен сан болғанда Бернулли формуласын қолдану үлкен арифметикалық есептеулерге әкеп соғады. Сондықтан да, n - өте үлкен сан және $p > 0{,}1$ ($npq > 9$ болатындай) болған жағдайда Лапластың локалдық немесе интегралдық теоремалары қолданылады.

Лапластың жергіліктілік (локалдық) теоремасы. Тәуелсіз n сынақ жүргізілгенде A оқиғасының тура k рет пайда болу ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

мұндағы $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $0 < p < 1$. $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ функциясының мәнін есептеу үшін дайын кесте (2-қосымша, 1-кесте) қолданылады және $\varphi(-x) = \varphi(x)$ екенін ескеру қажет.

Лапластың интегралдық теоремасы. Тәуелсіз n сынақ жүргізу нәтижесінде A оқиғасының k_1-ден кем емес және k_2-ден артық емес рет пайда болуының ықтималдығы мына формула бойынша жуықтап есептеледі:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\,, \tag{4}$$

мұндағы $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. $\Phi(x) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ Лаплас функциясын есептеу үшін дайын кесте (2-қосымша, 2-кесте) қолданылады және $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ екенін ескеру қажет. Лаплас функциясының кестесін қолдану үшін жоғарыдағы формуланы

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \tag{5}$$

түрінде қолданған тиімді.

1730 жылы $p = \dfrac{1}{2}$ дербес жағдайы үшін ғана Муавр асимптоталық формуланы тапты, ал 1783 жылы Муаврдың бұл формуласын 0 мен 1-ден өзге кез келген p үшін жалпылады. Сондықтан да, жоғарыдағы теореманы кейде Муавр-Лапластың теоремасы деп те атайды.

Егер n өте үлкен сан, ал p өте аз шама ($npq < 9$ болатындай) және $\lambda = np$ шамасы тұрақты болған жағдайда *Пуассон формуласы* қолданылады.

Егер $n \to \infty,\ p \to 0$ болып және $\lambda = np \neq 0$ шамасы тұрақты болса, онда

$$\lim_{n \to \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{6}$$

Мысал 25. Нысананы көздеп тәуелсіз 6 рет оқ атылды. Әрқайсысында оқтың нысанаға тию ықтималдығы $p = 0{,}9$. Атылған тәуелсіз 6 оқтың тура төртеуінің нысанаға тию ықтималдығын тап.

$$P_6(4) = \frac{6!}{4! \cdot 2!} (0{,}9)^4 \cdot (0{,}1)^2 = 0{,}984\,.$$

Мысал 26. Жүргізілген *n* тәуелсіз сынақтың әрқайсысында қандай да бір оқиғаның пайда болу ықтималдығы тұрақты және *p*-ға тең. Осы оқиғаның k_2-ден артық емес рет пайда болу ықтималдығын тап (мұндағы *n*-өте үлкен сан, ал $p > 0{,}1$ ($npq > 9$) болсын).

Шешуі. n - өте үлкен сан және $p > 0{,}1$ ($npq > 9$) болғандықтан, оқиғаның $0 \le m \le k_2$ рет пайда болу ықтималдығын табу керек болғандықтан, Лапластың интегралдық формуласын қолданамыз: $P_n(0, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, мұндағы $x_1 = \dfrac{0 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, Лаплас функциясының аргументтерін есептеп, дайын кестеден осы функцияның сәйкес мәндерін тауып, орнына қоямыз.

Мысал 27. 1000 тәтті тоқаш дайындау үшін 5000 жүзім қажет. Кездейсоқ алынған кез келген тәтті тоқашта үштен аз жүзім болу ықтималдығын тап.

Шешуі. *A* оқиғасы – кездейсоқ алынған тәтті тоқаштағы жүзім саны үштен аз деген оқиға болса, онда

$$P(A) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2),$$

(6) формуласы бойынша: $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$, ендеше

$$P(A) = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-5} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-5} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-5} \approx 0{,}125.$$

Мысал 28 .Телефон станциясында әрбір қоңырау шалу кезінде ақау болу ықтималдығы 0,002. Барлығы 1000 қоңырау шалынған болса, оның ішінде 9 ақау болу ықтималдығын тап.

Шешуі. Пуассон формуласы бойынша есептейміз, мұндағы n=1000, k=9, p=0,002. Ендеше, $P_{1000}(9) = \dfrac{(1000 \cdot 0{,}002)^9}{9!}e^{-2} \approx 0{,}00019$.

1.9 Есеп шығару үлгілері

Есеп 1. Екі ойын сүйегі лақтырылған. *А* оқиғасы – түскен ұпайлардың қосындысы тақ, ал *В* оқиғасы – тым болмағанда бір сүйекте екі деген ұпай түсті деген оқиға болсын. $A\cup B$ және $A\bigcap B$ оқиғаларын сипаттаңыз.

Шешуі. Берілген сынақпен байланысты элементар оқиғалар кеңістігі элементар оқиғалардың ақырлы санынан тұрады:

$C=\{(1,1),(1,2),...,(2,1),...,(6,6)\}$; С жиынының барлық элементтер саны 36.

Есеп шартына сәйкес, *А* және *В* оқиғалары келесі элементар оқиғалардан тұрады:

$A=\{(1,2),(1,.4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),...,(6,1),(6,3),(6,5)\};$

$B=\{(1,2),(2,.1),(3,2),(.4,2),(5,2),(6,2),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\};$

$A\cup B$ оқиғасы не түскен ұпайлардың қосындысы тақ сан, не ойын сүйектерінің бірінде екі цифры, ал екіншісінде – жұп сан түседі деген оқиға, яғни:

$A\cup B=\{(1,2),(1,.4),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),...,(6,1),(6,3),(6,5)\}.$

$A\bigcap B$ оқиға әрі *А* оқиғасы, әрі *В* оқиғасы қатар орындалатын оқиға. Сондықтан, $A\bigcap B$ оқиғасы – екі ойын сүйегінің бірінде екі цифры түсті деген оқиға (*В* оқиғасы), ал екіншісінде – тақ сан түсті деген оқиға болсын. Онда түскен ұпайлардың қосындысы – тақ сан (*А* оқиғасы) деген оқиға. Сонымен,

$$A\cap B=\{(1,2),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(5,2)\}.$$

Есеп 2. Бригадада 25 жұмысшы бар. Үш комиссияның құрамына үш жұмысшыны неше әдіспен таңдап алуға болады (әр комиссияның ішінде бір жұмысшыдан болса)?

Шешуі. Бір топтау екіншісінен комиссияны таңдап алу ретімен ерекшеленеді, яғни бұл топтауда элементтерінің орналасу реті ескеріледі. Ендеше, 25 жұмысшының ішінен әр комиссияның құрамында 3 жұмысшыдан болатындай $A_{25}^{3}=13800$ әдіспен таңдап алуға болады.

Жауабы: 13800.

Есеп 3. 9 лотерея билеттерінің ішінде 4 билетте ұтыс бар. Кездейсоқ алынған 5 билеттің ішінде 3 ұтыс билеті болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Классикалық анықтама бойынша $P(A)=\dfrac{m}{n}$, $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{40}{126}\approx 0{,}3$,

мұндағы, $n=C_9^5=126$ - 9 лотерея билеттерінің ішінен 5 билетті кездейсоқ таңдап алу саны, $m=C_4^3\cdot C_5^2=40$ - кездейсоқ алынған 5 лотерея билеттерінің ішінде 3 ұтыс билетінің болу саны.

Жауабы: 0,3.

Есеп 4. 8-қабатты үйдің тасымалдау лифтісіне үш жүргінші келіп отырды. Екінші қабаттан бастап әрбір жүргінші басқаларынан өзгеше бірдей ықтималдықпен кез-келген қабаттан шыға алады. Төмендегі ықтималдықтарды табыңыз: 1) әрқайсысы әр қабаттан шықты; 2) кемінде екеуі бір қабаттан шықты.

Табу керек: P_1, P_2

Шешуі. n барлық мүмкін оқиғалар жиынын анықтайық:

Жүргіншілердің лифтіден шығуының реті бар, сондықтан элементтердің құрамы мен орналасу ретінде өзгешелігі бар топтастыруды аламыз, яғни, 7 қабаттан 3 адамнан қайталанған орналастыру. Ендеше, $n = 7^3 = 243$.

Жүргіншілер әр қабаттан шығуы үшін элементтер қайталанбауы қажет, сондықтан:

1) $m = A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$, онда $P_1 = \frac{210}{7^3} = \frac{30}{49}$.

2) «кемінде екеуі бір қабаттан шықты» оқиғасы «әрқайсысы әр қабаттан шықты» оқиғасына қарама – қарсы, яғни, 1) жағдайын ескерсек, онда

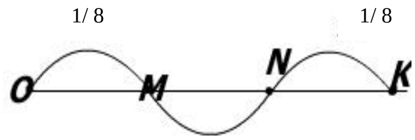
$$P_2 = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}.$$

Жауабы: $P_1 = \frac{30}{49}$, $P_2 = \frac{19}{49}$.

Есеп 5. Бірлік ұзындықты кесіндіде кездейсоқ бір нүкте пайда болады. Осы нүктеден кесіндінің ұштарына дейінгі қашықтық $\frac{1}{k}$- ден артық болуының ықтималдығын табыңыз .

Берілгені: k=8.

Шешуі. 8-суреттегі OK кесіндісінің ұзындығы 1-ге тең болсын. OM және NK кесінділерінің ұзындықтары $\frac{1}{k} = \frac{1}{8}$. Есеп шарты бойынша осы нүктеден кесіндінің ұштарына дейінгі қашықтық $\frac{1}{8}$-ден артық болуы керек, яғни, кездейсоқ пайда болған нүкте MN кесіндісінде орналасса, есеп шарты орындалғаны.



8-сурет – кесіндіні бөліктеу

Геометриялық ықтималдық формуласы бойынша:

$$P(A) = \frac{m(MN)}{m(OK)} = \frac{1 - \frac{2}{8}}{1} = \frac{3}{4}.$$

Жауабы: $\frac{3}{4}$.

Есеп 6. Екі адам T_1 сағат пен T_2 сағат аралығында кезігуге келісті. Олардың біріншісі екіншісін 10 минут тосады да, одан кейін жүре береді. Ал

екіншісі t минут тосады да, одан кейін жүре береді. Егер олардың кезігуге келулері бір-біріне тәуелсіз болса, онда олардың:
1) кезігу ықтималдығын;
2) кезікпеу ықтималдығын
есептеңіз.
Берілгені: $T_1 = 16.00$, $T_2 = 17.30$, $t = 5$.

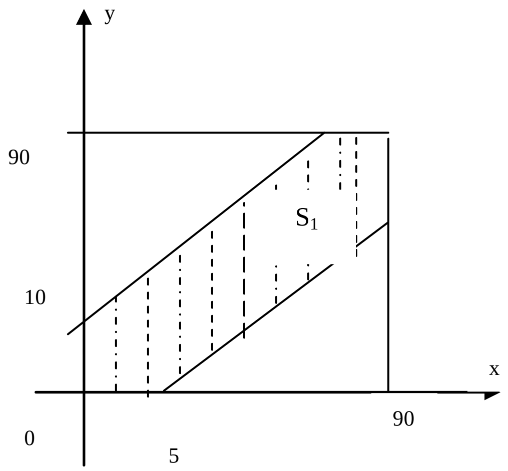
Шешуі. x дегеніміз – бірінші адамның келу уақыты, ал y дегеніміз – екінші адамның келу уақыты болсын. Барлық мүмкін мәндер жиыны (элементар оқиғалар кеңістігі) ауданы 90^2 болатын шаршы, $T = T_2 - T_1 = 90$ мин болғандықтан (9-сурет).

1) Есеп шарты бойынша олардың кезігу ықтималдығын табу үшін, геометриялық ықтималдықты қолданамыз: егер $x < y$ болса, онда $y - x \le 10$ және егер $x > y$ болса, онда $x - y \le 5$.

Ізделінді облыс координат жазықтығының бірінші ширегінде жатады (9-сурет) және оны S_1 арқылы белгілейік. A дегеніміз – олардың кезігу оқиғасы болса, онда $P(A) = \dfrac{S_1}{S}$ формуласымен есептеледі:

$$P(A) = \frac{\left(T^2 - \frac{1}{2}(T - t_1)^2 - \frac{1}{2}(T - t_2)^2\right)}{T^2} = 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{t_1}{T})^2 - \frac{1}{2}(1 - \frac{t_2}{T})^2,$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{10}{90})^2 - \frac{1}{2}(1 - \frac{5}{90})^2 = 0{,}159.$$



9-сурет - Есептің геометриялық кескіні

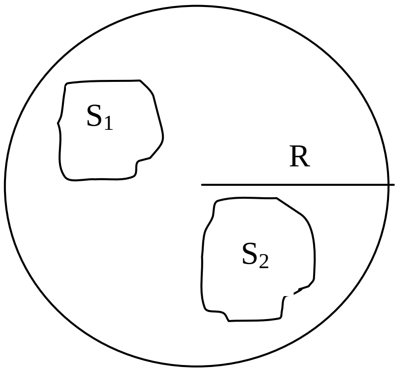
2) Олардың кезікпеу ықтималдықтары осы есептің 1) жағдайына қарама-қарсы оқиға болғандықтан, ізделінді ықтималдық:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad P(\overline{A}) = 1 - 0{,}159 = 0{,}841.$$

Жауабы: $P(A) = 0{,}159$, $P(\overline{A}) = 0{,}841$.

Есеп 7. Радиусы R - ге тең дөңгелекте кездейсоқ бір нүкте пайда болды. Аудандары S_1 және S_2 болатын өзара қиылыспайтын екі фигураның біреуіне келіп түсуінің ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $R = 15$, $S_1 = 2{,}7$, $S_2 = 7{,}9$.



10-сурет – Есептің геометриялық кескіні

Шешуі. A дегеніміз – «аудандары S_1 және S_2 болатын өзара қиылыспайтын екі фигураның біреуіне келіп түсуі» деген оқиға болсын. Геометриялық ықтималдықтың формуласы бойынша (10-сурет)

$$P(A) = \frac{S_1 + S_2}{\pi R^2}.$$

бұдан

$$P(A) = \frac{2{,}7 + 7{,}9}{3{,}14 \cdot 15^2} = 0{,}015.$$

Жауабы: $P(A) = 0{,}015$.

Есеп 8. Екі партияда сәйкес k_1 және k_2% сапалы бұйымдар бар. Әр партиядан кездейсоқ бір – бір бұйым таңдап алынды. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңыз:

1) тым болмағанда біреуі сапасыз;
2) екеуі сапасыз;
3) біреуі сапалы және біреуі сапасыз?

Берілгені: $k_1 = 83$, $k_2 = 35$.

Шешуі. Белгілеулер енгізейік: A_1 - 1-партиядан сапалы бұйым таңдап алынуы, A_2 - 2-партиядан сапалы бұйым таңдап алынуы, $\overline{A_1}$ - 1-партиядан сапасыз бұйым таңдап алынуы событие $\overline{A_2}$ - 2-партиядан сапасыз бұйым таңдап алынуы. Онда

$$P(A_1) = 0{,}83,\ P(A_2) = 0{,}35,\ P(\overline{A_1}) = 0{,}17,\ P(\overline{A_2}) = 0{,}65.$$

1) B – кем дегенде біреуі сапасыз болуы: $B = \overline{A_1} A_2 + A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}$, мұндағы $\overline{A_1} A_2,\ A_1 \overline{A_2},\ \overline{A_1}\,\overline{A_2}$ барлық оқиғалары өзара үйлесімсіз.

Тым болмағанда бір бұйымның сапасыз болуының ықтималдығы

$$P(B) = P(\overline{A_1} A_2) + P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

немесе

$$P(B) = 0{,}7095.$$

2) Екеуі де сапасыз: $C = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$, мұндағы $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ - тәуелсіз оқиғалар. Екеуі сапасыз бұйым болуының ықтималдығы:

$$P(C) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) \text{ немесе } P(C) = 0{,}17 \cdot 0{,}65 = 0{,}1105.$$

3) Ізделінді оқиға – бір бұйым сапалы және бір бұйым сапасыз:

$$D = \overline{A_1}A_2 + A_1\overline{A_2}.$$

Бір бұйым сапалы және бір бұйым сапасыз болуының ықтималдығы

$$P(D) = P(\overline{A_1}A_2) + P(A_1\overline{A_2}) \text{ немесе}$$

$$P(D) = 0{,}17 \cdot 0{,}35 + 0{,}83 \cdot 0{,}65 = 0{,}599.$$

Жауабы: $P(B) = 0{,}7095$, $P(C) = 0{,}1105$, $P(D) = 0{,}599$.

Есеп 9. Нысанаға оқты дәл тигізу ықтималдығы бірінші атқыш үшін p_1 - ге тең, ал екіншісі үшін - p_2. Бірінші атқыш n_1 рет атыс, екінші атқыш n_2 рет атыс жүргізді. Нысанаға оқ тимеуінің ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}59$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$.

Шешуі. Белгілеулер енгізейік: *A* – 1-ші атқыштың n_1 рет атыс жасап, нысанаға оқ тигізбегені туралы оқиға. *B* – 2- ші атқыштың n_2 рет атыс жасап, нысанаға оқ тигізбегені туралы оқиға.

Бір рет атыс жасағанда екі атқыш үшін сәйкес нысанаға оқ тигізбеу ықтималдықтарын $q = 1 - p$ формуласымен табайық:

$$q_1 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

$$q_2 = 1 - 0{,}59 = 0{,}41.$$

Ізделінді ықтималдықты есептеу үшін тәуелсіз оқиғалардың ықтималдықтарының көбейтіндісінің формуласын қолдану қажет:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

1-ші атқыштың n_1 рет атыс жасап, нысанаға оқ тигізбеуінің ықтималдығы $p(A) = q_1^{n_1}$, 2-ші атқыштың n_2 рет атыс жасап, нысанаға оқ тигізбеуінің ықтималдығы $p(B) = q_2^{n_2}$ тең.

$$P(AB) = q_1^{n_1} q_2^{n_2} = (0{,}75)^2 \cdot (0{,}41)^3 \approx 0{,}039.$$

Жауабы: $P(AB) \approx 0{,}039$.

Есеп 10. *A* және *B* екі ойыншы кезекпен тиын лақтырды. Кімге бірінші «ел таңба» жағы түссе, сол ойыншы жеңіске жетеді. Бірінші ойынды *A* ойыншысы бастаса, екінші – *B*, үшінші – *A* және т.с.с.

1) *B* ойыншы *k* ойыннан кем емес лақтыруда жеңіске жетуінің ықтималдығын табыңыз.

2) Әрбір ойыншы үшін ойынның ұзаққа созылу жағдайында жеңіске жету ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: k=11.

Шешуі. Есеп шартына сәйкес ойынды тізбектеп жазайық:

A	$\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}A$
$\overline{A}B$	$\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B$
$\overline{A}\overline{B}A$	$\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}A$
$\overline{A}\overline{B}\overline{A}B$	$\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B$
$\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}A$	$\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}A$
$\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B$	…………..

1) C оқиғасы - «B ойыншысы 11 атыстан кем емес лақтыруда жеңіске жетуі»:

$$C=\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B+\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B,$$

Бұл оқиғаның қосылғыштарының барлығы – үйлесімсіз оқиғалар болғандықтан, С оқиғасының ықтималдығы:

$$P(C)=P(\overline{A}\;B)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}\overline{B}\overline{A}B).$$

Барлық оқиғалар тәуелсіз екенін ескерсек, нәтижесінде:

$$P(C)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{10}}=0{,}333.$$

2) A оқиғасы - бірінші ойыншы үшін ойынның ұзаққа созылу жағдайында жеңіске жету ықтималдығы:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}P_n(A).$$

Шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысының формуласын $S=\dfrac{b_1}{1-q}$ қолданып,

$$P(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=\frac{2}{3}.$$

аламыз.

B оқиғасы – екінші ойыншы үшін ойынның ұзаққа созылу жағдайында жеңіске жету оқиғасы A оқиғасына қарама – қарсы оқиға. Ендеше, оның ықтималдығы:

$$P(B)=1-P(A)=\frac{1}{3}.$$

Жауабы: $P(C)=0{,}333$, $P(A)=\dfrac{2}{3}$, $P(B)=\dfrac{1}{3}$.

Есеп 11. Қорапта 1 –ден M –ге дейін нөмірленген M шарлар бар. Олар бір-бірден қайтарусыз алынады. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңыз:

1. A – алынған шарлар нөмірлері өсу ретімен 1,2, …, M тізбегін құрайды;

2. B – тым болмағанда бір рет алынған шардың нөмірі мен реттік нөмірі сәйкес келеді;
3. C – бірде-бір рет алынған шардың нөмірі мен реттік нөмірі сәйкес келмейді;

Берілгені: $M=8$.

Табу керек: $P(A)-?, P(B)-?, P(C)-?$

$M\to\infty$ ұмтылғанда A,B,C оқиғаларының ықтималдықтарының шектік мәнін табыңыз.

Шешуі. Белгілеулер енгізейік:
A_1-қораптан 1-нөмірлі шар алынды;
A_2- қораптан 2-нөмірлі шар алынды;
A_3- қораптан 3-нөмірлі шар алынды;
A_4- қораптан 4-нөмірлі шар алынды;
A_5- қораптан 5-нөмірлі шар алынды;
A_6- қораптан 6-нөмірлі шар алынды;
A_7- қораптан 7-нөмірлі шар алынды;
A_8- қораптан 8-нөмірлі шар алынды;

1.Онда A оқиғасы $A=A_1A_2...A_M$ өзара үйлесімді оқиғалардың көбейтіндісіне тең, ендеше ықтималдығы

$$P(A)=P(A_1A_2....A_M)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)....P_{A_1A_2...A_{M-1}}(A_M)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{8!}=\frac{1}{403}$$

2. $B=A_1+A_2+.....+A_M$ оқиғасы «тым болмағанда бір рет алынған шардың нөмірі мен реттік нөмірі сәйкес келуі», бұдан $P(A_1)=P(A_2)=....=P(A_M)=\frac{1}{8}$ және $P\left(\sum_{i=1}^{8}A_i\right)=\sum_{i=1}^{8}P(A_i)=8\cdot\frac{1}{8}=1$ ескерсек, оқиғаның ықтималдығы:

$$P(B)=P\left(\sum_{i=1}^{M}A_i\right)=\sum_{i=1}^{M}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le M}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le M}P(A_iA_jA_k)-...+(-1)^{M+1}P(A_1A_2...A_M)$$

формуласымен есептеледі, өйткені, , онда

,

$P(A_iA_j)=P(A_i)\cdot P_{A_i}(A_j)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}$ барлық $i\neq j$ үшін есептейік. Мұндай барлық қосылғыштар саны $C_8^2=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}$, онда

$$\sum_{1\le i<j\le 8}P(A_iA_j)=C_8^2P(A_i)P_{A_i}(A_j)=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{2!}.$$

Осыған сәйкес, $P(A_i A_j A_k) = P(A_i) \cdot P_{A_i}(A_j) \cdot P_{A_i A_j}(A_k) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$ болады,

$1 \le i < j < k \le 8$ үшін. Мұндай барлық қосылғыштар саны $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, онда

$\sum_{1 \le i < j \le 8} P(A_j A_j A_k) = C_8^3 P(A_i) P_{A_i}(A_j) P_{A_i A_j}(A_k) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$ және т.с.с.

Ендеше,

$$P(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} = 0{,}632 .$$

3. B және C оқиғалары қарама – қарсы болғандықтан, $P(B) + P(C) = 1$, бұдан $P(C) = 1 - P(B)$

$$P(C) = 1 - 0{,}632 = 0{,}368 .$$

A, B, C оқиғаларының ықтималдықтарының шектік мәнін есептейік:

$$\lim_{M \to \infty} P(A) = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M!} = 0,$$

$$\lim_{M \to \infty} P(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots. + (-1)^M \frac{1}{M!} + \ldots.$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, екендігін қолданып,

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots,$$

теңдігін аламыз. $P(B) + P(C) = 1$ теңдігін ескерсек, онда

$$\lim_{M \to \infty} P(B) = 1 - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots \right) = 1 - e^{-1} \approx 1 - \frac{1}{2{,}7} \approx 0{,}63 ,$$

$$\lim_{M \to \infty} P(C) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37 .$$

Жауабы: $P(A) = 0{,}000025$, $P(B) = 0{,}632$, $P(C) = 0{,}368$.

Есеп 12. 1000 шамның n_i шамы i-партиясынан алынған. $i = 1,2,3$, $\sum_{i=1}^{3} n_i = 1000$. 1-партияда 6%, 2-партияда 5%, 3-партияда 4% сапасыз шамдар бар болса, онда кездейсоқ таңдап алынған бір шам сапасыз болуының ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $n_1 = 230$, $n_2 = 480$, $n_3 = 1000 - (230 + 480) = 290$.

Шешуі. Белгілеулер енгізейік.

B_1 болжамы – сапасыз шам бірінші партиядан;

B_2 болжамы – сапасыз шам екінші партиядан;

B_3 болжамы – сапасыз шам үшінші партиядан;

A - «кездейсоқ таңдап алынған бір шам сапасыз болу» оқиғасы.

Есеп шартынан:

$$P(B_1)=\frac{230}{1000}=0{,}23\,,\;P(B_2)=\frac{480}{1000}=0{,}48\,,\;P(B_3)=\frac{290}{1000}=0{,}29\,,$$

$$P_{B_1}(A)=\frac{6}{100}=0{,}06\,,\;P_{B_2}(A)=\frac{5}{100}=0{,}05\,,\;P_{B_3}(A)=\frac{4}{100}=0{,}04\,.$$

Толық ықтималдықтар формуласын қолданып,

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P_{B_i}(A)\,,$$

$$P(A)=0{,}23\cdot 0{,}06+0{,}48\cdot 0{,}05+0{,}29\cdot 0{,}04=0{,}05\,.$$

нәтижесін аламыз.

Жауабы: $P(A)=0{,}05$.

Есеп 13. Бірінші жәшікте N_1 ақ және M_1 қара шарлар бар, ал екінші жәшікте N_2 ақ және M_2 қара шарлар бар. Бірінші жәшіктен екіншісіне K шар ауыстырып салынды. Екінші жәшіктен кездейсоқ бір шар таңдап алынды. Таңдап алынған шардың ақ шар болуының ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $N_1=25,\, M_1=3,\, N_2=40,\, M_2=2,\, K=14.$

Шешуі. Бірінші жәшіктен екіншісіне 14 шар ауыстырып салынғандықтан және бірінші жәшікте үш қара шар болғандықтан, төмендегідей болжамдар құрамыз:

B_1 болжамы - бірінші жәшіктен екіншісіне 14 ақ шар ауыстырып салынды,

B_2 болжамы - бірінші жәшіктен екіншісіне 13 ақ шар және 1 қара шар ауыстырып салынды

B_3 болжамы - бірінші жәшіктен екіншісіне 12 ақ шар және 2 қара шар ауыстырып салынды

B_4 болжамы - бірінші жәшіктен екіншісіне 11 ақ шар және 3 қара шар ауыстырып салынды

A оқиғасы - таңдап алынған шардың ақ шар болуы.

Болжамдардың ықтималдықтарын есептейік.

$$P(B_1)=\frac{C_{25}^{14}}{C_{28}^{14}}\approx 0{,}11,\qquad P(B_2)=\frac{C_{25}^{13}\cdot C_3^1}{C_{28}^{14}}\approx 0{,}39,$$

$$P(B_3)=\frac{C_{25}^{12}\cdot C_3^2}{C_{28}^{14}}\approx 0{,}39,\qquad P(B_4)=\frac{C_{25}^{11}\cdot C_3^3}{C_{28}^{14}}\approx 0{,}11.$$

B_1 болжамы - бірінші жәшіктен екіншісіне 14 ақ шар ауыстырып салынғанын білдіреді, ендеше, екінші жәшікте 54 ақ шар және 2 қара шар бар. Онда шартты ықтималдық:

$$P_{B_1}(A)=\frac{54}{56}\approx 0{,}96.$$

B_2 болжамы - бірінші жәшіктен екіншісіне 13 ақ шар және 1 қара шар ауыстырып салынғанын білдіреді, ендеше, екінші жәшікте 53 ақ шар және 3 қара шар бар. Онда шартты ықтималдық: $P_{B_2}(A) = \dfrac{53}{56} \approx 0{,}95$.

Дәл солай, $P_{B_3}(A) = \dfrac{52}{56} \approx 0{,}93$, $P_{B_4}(A) = \dfrac{51}{56} \approx 0{,}91$.

Толық ықтималдықтар формуласын қолданып,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i) P_{B_i}(A),$$

$$P(A) = 0{,}11 \cdot 0{,}96 + 0{,}39 \cdot 0{,}95 + 0{,}39 \cdot 0{,}93 + 0{,}11 \cdot 0{,}91 \approx 0{,}94$$

аламыз.

Жауабы: $P(A) = 0{,}94$

Есеп 14. Альбомда *k* таза және *l* сөндірілген маркалар бар. Олардан кездейсоқ *m* маркалар таңдап алынды. (олардың ішінде таза да, сөндірілген маркалар болуы мүмкін), олардың барлығы сөндіріліп, қайтадан альбомға салынды. Қайтадан альбомнан кездейсоқ *n* маркалар таңдап алынды. Кездейсоқ таңдап алынған *n* маркалардың таза болуының ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $k = 6, \quad l = 6, \quad m = 1, \quad n = 2.$

Шешуі. Альбомдағы *k* таза және *l* сөндірілген маркалардың санын ескере отырып, мүмкін болатын болжамдар құрайық:

B_1 болжамы - альбомнан 1 сөндірілген марка алынуы,

B_2 болжамы - альбомнан 1 таза марка алынуы.

A оқиғасы - кездейсоқ n маркалар таңдап алынған таза болуы.

Ықтималдықтардың классикалық анықтамасын қолданып, жорамалдардың ықтималдығын есептейік:

$$P(B_1) = \frac{6}{12} = 0{,}5, \quad P(B_2) = \frac{6}{12} = 0{,}5.$$

Олардың шартты ықтималдықтары

$$P_{B_1}(A) = \frac{C_6^2}{C_{12}^2} = 0{,}23, \quad P_{B_2}(A) = \frac{C_5^2}{C_{12}^2} = 0{,}15.$$

Толық ықтималдықтар формуласын қолданып,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(B_i) P_{B_i}(A),$$

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}23 + 0{,}5 \cdot 0{,}15 = 0{,}19$$

аламыз.

Жауабы: $P(A) = 0{,}19$.

Есеп 15. Дүкенге үш зауыттан бірдей типті бұйымдар келіп түсті, әрбір *i*-зауыттан сәйкесінше m_i% бұйым келеді. (i = 1, 2, 3). Ал әрбір *i*-зауыттан сәйкесінше n_i% бірінші сортты бұйымдар бар. Бір бұйым сатып алынды. Сатып алынған бұйымның бірінші сортты және j зауытта шығарылған бұйым болуының ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $m_1 = 20, m_2 = 30, m_3 = 50$, $n_1 = 70, n_2 = 70, n_3 = 90$, $j = 1$.

Табу керек: $p_A(B_1)$-?

Шешуі. Мүмкін болатын болжамдар құрайық:

B_1 болжамы - сатып алынған бұйым бірінші зауыттан болуы,

B_2 болжамы - сатып алынған бұйым екінші зауыттан болуы,

B_3 болжамы - сатып алынған бұйым үшінші зауыттан болуы,

Есеп шарты бойынша

$$P(B_1) = 0{,}2, \quad P(B_2) = 0{,}3, \; P(B_3) = 0{,}5,$$
$$P_{B_1}(A) = 0{,}7, \; P_{B_2}(A) = 0{,}7, \; P_{B_3}(A) = 0{,}9.$$

теңдіктерін аламыз. Ізделінді ықтималдықты есептеу үшін Байес формуласын қолданамыз:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)},$$

мұндағы, $P(A)$- толық ықтималдық, оны есептеу формуласы:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P_{B_i}(A).$$

Бұдан

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}8.$$

Сонымен, нәтижеде

$$P_A(B_1) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}8} = 0{,}175$$

аламыз.

Жауабы: $P_A(B_1) = 0{,}175$.

Есеп 16. Тиын «ел таңба» жағы n рет түскенше лақтырылады. «Сан» жағының m рет түсу ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $n = 7, m = 2$.

Шешуі. Тиынды «ел таңба» жағы n рет түскенше лақтырамыз. Есеп шарты бойынша «сан» жағының m рет түсу ықтималдығын табуымыз қажет. Ең соңғы лақтырыста «ел таңба» жағы n-ші рет түскеннен кейін ойынды тоқтатамыз, яғни, соңғы лақтырысқа дейін «сан» жағының m рет, ал «ел таңба» жағы n-1 рет түсу жағдайын қарастырамыз. Сонда, соңғы лақтырыста «ел таңба» жағы түсетіні белгілі болғандықтан, $n + m - 1$ лақтырыста тура m рет «сан» жағы түсу ықтималдығын немесе тура n-1 рет «ел таңба» жағы түсу ықтималдығын табу керек. Ендеше, Бернулли формуласы бойынша $P_{n+m-1}(m)$ не $P_{n+m-1}(n-1)$ есептейміз. Онда ізделінді ықтималдық:

$p = p_1 \cdot P_{n+m-1}(m) = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+m}}$, мұндағы p_1-соңғы лақтырыста «ел таңба түсу» ықтималдығы.

Біздің есеп шартының берілуі бойынша $n = 7,\ m = 2$, ізделінді ықтималдық:

$$p = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{7}{128} \approx 0{,}055 .$$

Жауабы: $p = 0{,}055$.

Есеп 17. Лотереяның бір билетінде ұтыс болу ықтималдығы p-ға тең. n билет сатып алынды. Ұтысы бар билеттер саны үшін ең ықтимал санды анықтап және оған сәйкес ықтималдықты есептеңіз.

Берілгені: $p = 0{,}3, \quad n = 13.$

Шешуі. Ең ықтимал санды анықтау үшін $n \cdot p - q \le k_0 \le n \cdot p + p$ формуласын қолданамыз. Егер $n \cdot p + p$ бүтін болса, онда k_0 екі мәнге ие болады, ал егер бөлшек болса, онда $k_0 = [n \cdot p + p]$ (бүтін бөлігі).

Біздің жағдайда ең ықтимал сан:

$$k_0 = (n+1)p = (13+1) \cdot 0{,}3 = [4{,}2] = 4.$$

Бернулли форуласымен ықтималдықты есептесек, онда нәтижеге келеміз:

$P_{13}(4) = C_{13}^4 \cdot (0{,}3)^4 (0{,}7)^{13-4} = 0{,}234.$

Жауабы: $P_{13}(4) = 0{,}234$.

Есеп 18. Әрбір лотерея билетіне үлкен ұтыс түсуі ықтималдығы p_1 - ге тең, ал лотерея билетіне ұсақ ұтыс түсуі ықтималдығы - p_2, лотерея билетіне ұтыс түспеуі ықтималдығы - p_3 және $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$. n билет сатып алынды. Сатып алынған билет ішінде n_1 үлкен ұтыс және n_2 ұсақ ұтыс болуының ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $n = 15, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 2, \quad p_1 = 0{,}15, \quad p_2 = 0{,}15..$

Табу керек: $P_n(n_1, n_2, n_3) - ?$

Шешуі. Ұтысы жоқ билеттер саны: $n_3 = n - n_1 - n_2 = 15 - 2 - 2 = 11$. Билетте ұтыс болмауының ықтималдығы

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0{,}15 - 0{,}15 = 0{,}7 .$$

Полиномдық үлестіру формуласын қолданып,

$$P_n(n_1, n_2, n_3) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3},$$

$$P_{15}(2{,}2{,}11) = \frac{15!}{2! \cdot 2! \cdot 11!} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}7^{11} = 0{,}0819$$

нәтижесін аламыз.

Жауабы: $P_{15}(2{,}2{,}11) = 0{,}0819$.

Есеп 19. Телефон стансасында әрбір телефон соғу кезінде «жүйеге қосылмау» ықтималдығы p ға тең. n телефон соғуы келіп түскен болса, онда m рет «жүйеге қосылмау» шартының ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $m = 7, \quad n = 1000, \quad p = 0{,}004$.

Табу керек: $P_{1000}(7) - ?$

Шешуі. Егер $n = 1000$ үлкен, ал $p = 0{,}004$ ықтималдығы аз және $\lambda = np = 4 \neq 0$ шамасы тұрақты, онда Пуассон формуласын қолднамыз:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

$$P_{1000}(7) = \frac{4^7}{7!} \cdot e^{-4} = \frac{16384}{5040} \cdot \frac{1}{53{,}1441} = 0{,}0612 .$$

Жауабы: $P_{1000}(7) = 0{,}0612$

Есеп 20. Қандай да бір оқиғаның әрбір 100 тәуелсіз сынақта орындалу ықтималдығы 0,8-ге тең. Оқиғаның орындалуы 70-тен кем емес, 95-тен артық емес рет пайда болу ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Есеп шарты бойынша $P_{100}(70;95)$ табу керек. Лапластың интегралдық теоремасын қолданып, $P_{100}(70;95) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, мұндағы:

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}5,$$

$$x_2 = \frac{95 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 3{,}75 .$$

аламыз. Онда

$$P_{100}(70;95) = \Phi(3{,}75) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(3{,}75) + \Phi(2{,}5) = 0{,}49977 + 0{,}49379 = 0{,}99356 .$$

Жауабы: $P_{100}(70;95) = 0{,}99356$.

1.10 Қайталауға арналған сұрақтар

1. Оқиғалар. Оқиғаларға қолданылатын амалдар.
2. Ықтималдықтың классикалық, геометриялық және статистикалық анықтамалары.
3. Ықтималдықтарды қосу теоремасы.
4. Шартты ықтималдық. Ықтималдықтарды көбейту теоремасы.
5. Толық ықтималдық формуласы . Байес формуласы.
6. Тәуелсіз сынақтар схемасы. Бернулли формуласы.
7. Лапластың локалдық және интегралдық теоремасы.
8. Пуассон формуласы.

2 КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР

2.1 Кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдары

Ω элементар оқиғалар кеңістігінде анықталған $X = X(\omega)$ функциясын X кездейсоқ шамасы деп атайды. Кездейсоқ шамалар мен кездейсоқ оқиғаларды бір-бірінен ажырата білген жөн. Анықтамадан байқап отырғанымыздай кездейсоқ шама міндетті түрде пайда болады, тек оның қандай мәнді қабылдайтыны алдын-ала белгісіз. Ал кездейсоқ оқиғаның пайда болуының өзі кездейсоқ жай.

Жоғарыдағы кездейсоқ шаманың анықтамасы Ω элементар оқиғалардың дискретті кеңістігі үшін нақты дәл анықтама болып табылады. Жалпы жағдайда, $X(\omega)$ функциясына өлшемділік қасиеті жүктеледі.

$$P(X = x_k) = p_k > 0,\ k = 1,2,...;\ \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

теңдігін қанағаттандыратындай $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ (шектік нүктесіз) ақырлы немесе саналымды сандар жиыны бар болса, онда X кездейсоқ шамасы дискретті деп аталады.

x_k мәндері мен оларға сәйкес p_k ықтималдықтарының жиыны дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңдылығы деп аталады.

Дискретті кездейсоқ шаманың үлестірім заңының берілуінің қарапайым түрі үлестірім қатары деп аталатын кесте:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

мұндағы $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Дискреттік үлестірімнің мысалдары:

1.Биномдық үлестірім $P_n(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ 0 < p < 1,\ k = 0,1,2,...,n$

2 . Пуассон үлестірімі $P_n(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ \lambda > 0,\ k = 0,1,2,...$

3. Геометриялық үлестірім $P(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ 0 < p < 1,\ k = 1,2,...$

4. Гипергеометриялық үлестірім $P(X = k) = \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k = 0,1,2,..., min(M, n).$

Үзіліссіз X кездейсоқ шамасының үлестірім заңдылығы үлестірім функциясы (интегралдық функция) арқылы беріледі. X дискретті кездейсоқ шамасы үшін $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$, ал үзіліссіз кездейсоқ шама үшін – сынақ нәтижесінде X кездейсоқ шамасының x нүктесінің сол жағына қарай орналасу ықтималдығы: $F(x) = P(X < x)$. Үзіліссіз X шамасының үлестірімінің әртүрлі нүктелердің маңайындағы сипаттамаларын $F(x)$ функциясына қарағанда үлестірім тығыздығы (дифференциалдық функция) $f(x)=F'(x)$ толығырақ сипаттайды.

$F(x)$ үлестірім функциясының қасиеттері.

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $P(\alpha \le X \le \beta)=F(\beta)-F(\alpha)$
3. $F(x)$- кемімелі емес функция
4. $F(-\infty)=0, F(\infty)=1.$

$f(x)$ үлестірім тығыздығының қасиеттері

1. $f(x) \ge 0$
2. $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$
3. $P(\alpha < X < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

Үзіліссіз үлестірімнің мысалдары:

1. Бірқалыпты үлестірім $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in[a,b] \\ 0\ , & x\notin[a,b] \end{cases}, \ -\infty<a<b<\infty.$

2. Қалыпты үлестірім $f\ (x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}-e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty<a<+\infty, \ \sigma>0$

3.Көрсеткіштік үлестірім $f\ (x)=\begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \\ 0\ , & x<0, \end{cases} \ ,\lambda>0.$

4.Коши үлестірімі $f\ (x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

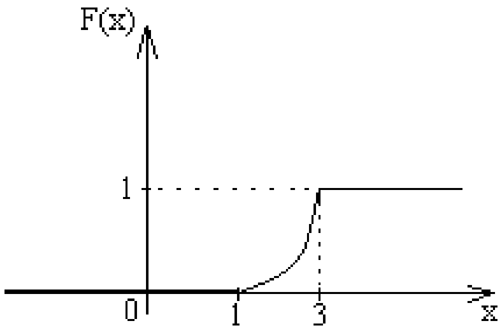
Мысал 29. $F(x)$ және $f(x)$ графиктерін тұрғыз, егер

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \textit{егер}\quad x\le 1 \\ \frac{1}{4}(x-1)^2, \textit{егер} & 1<x\le 3 \\ 1, & \textit{егер}\quad x>3 \end{cases}$$

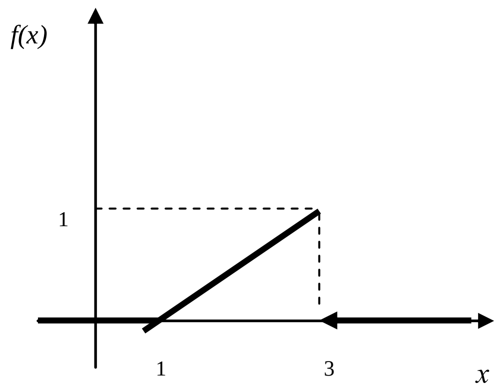
Шешуі. $f(x)=F'(x)$ табалық:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{егер}\quad x\le 1 \\ \frac{1}{2}(x-1), \textit{егер} & 1<x\le 3. \\ 0, & \textit{егер}\quad x>3 \end{cases}$$

Үлестірім функциясы мен тығыздығының графиктері сәйкесінше 11-сурет пен 12-суретте бейнеленген.



11-сурет



12-сурет

2.2 Кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

2.2.1 Дискретті кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

1. X дискретті кездейсоқ шамасының математикалық күтімі деп

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$$

саны аталады.

2. X кездейсоқ шамасының $D(X)$ дисперсиясы деп $(X-M(X))^2$ шамасының математикалық күтімі аталады:

$$D(X)=M(X-M(X))^2 .$$

Дискретті кездейсоқ шамасы үшін дисперсияны есептеу формуласы:

$$D(X)=M(X-M(X))^2=M(X^2)-[M(X)]^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i$$

3. Дискретті кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуы:

$$\sigma=\sqrt{D(X)}$$

4. Дискретті кездейсоқ шаманың k-ші ретті бастапқы моменті деп осы кездейсоқ шаманың k-ші дәрежесінің математикалық күтімін айтады:

$$\upsilon_k(X)=M(X^k)=\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$$

5. Дискретті кездейсоқ шаманың k-ші ретті орталық моменті деп оның өзінің математикалық үмітінен ауытқуының k-ші дәрежесінің математикалық күтімін айтады:

$$\mu_k(X)=M\left[X-M(X)\right]^k=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(x_i))^k p_i .$$

Кездейсоқ шаманың математикалық күтімі бірінші бастапқы моментіне, ал дисперсиясы екінші орталық моментіне тең:

$$M(X)=\upsilon_1(X),\quad D(X)=\mu_2(X).$$

Сондай-ақ, екінші, үшінші және төртінші ретті орталық моменттер мен бастапқы моменттер арасында мынадай байланыс бар:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2, \quad \mu_3 = \upsilon_3 - 3\upsilon_1\upsilon_2 + 2\upsilon_1^3, \quad \mu_4 = \upsilon_4 - 4\upsilon_1\upsilon_3 + 6\upsilon_1\upsilon_2 - 3\upsilon_1^4.$$

6. Дискретті кездейсоқ шаманың ең ықтималды мәнін оның модасы (M_0) деп атайды

7. Кездейсоқ шаманың n мүмкін мәндері болсын. $P(X < M_D) = P(X > M_D)$ теңдігі орындалса, онда M_D кездейсоқ шаманың медианасы деп аталады.

Егер $n = 2k$ болса, онда $M_D = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$, егер де $n = 2k+1$ болса, онда $M_D = x_{k+1}$.

8. Сондай-ақ, қарастырылып отырған кездейсоқ шаманың үлестірім заңын қалыпты үлестіріммен салыстыру үшін E_k эксцесс және A_s асимметрия сипаттамалары қарастырылады. Олар сәйкесінше мынадай формулалар бойынша есептеледі:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \qquad A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Ескерту: Қалыпты үлестіру үшін $E_k = 0$, $A_s = 0$.

2.2.2 Үзіліссіз кездейсоқ шамалардың сандық сипаттамалары

1. X үзіліссіз кездейсоқ шамасының математикалық күтімі деп

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

саны аталады.

2. X үзіліссіз кездейсоқ шамасы үшін дисперсияны есептеу формуласы:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)\, dx$$

немесе

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \left[M(X)\right]^2$$

3. Кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуы:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

4.Үзіліссіз кездейсоқ шаманың k-ші ретті бастапқы моменті:

$$\upsilon_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

5. Үзіліссіз кездейсоқ шаманың k-ші ретті орталық моменті:

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k f(x) dx.$$

6. Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір M_0 мәнінде $f_{\max} = f(M_0)$ теңдігі орындалса, онда M_0 кездейсоқ шаманың модасы деп аталады.

7. Егер кездейсоқ шаманың белгілі бір M_D мәнінде $P(X < M_D) = P(X > M_D)$ теңдігі орындалса, онда M_D кездейсоқ шаманың медианасы деп аталады.

8. Кездейсоқ шаманың өзінің математикалық күтімі бойынша симметриядан ауытқуы, оның A_s асимметриясы деп аталады:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Егер кездейсоқ шаманың үлестірімі математикалық күтімі бойынша симметриялы болса, онда $A_s = 0$. Егер $A_s > 0$ болса, онда дифференциалдық функцияның графигі сол жаққа қарай «созыңқы» болады, ал $A_s < 0$ болса, онда оң жаққа қарай «созыңқы» болады

9. Қалыпты үлестіріммен салыстырғанда дифференциалдық функцияның графигінің «жатыңқылық» деңгейін анықтайтын шаманы E_k эксцесс деп атайды:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Мұнда қалыпты үлестірім үшін $E_k = 0$. Егер $E_k > 0$ болса, онда Гаусс қисығымен салыстырғанда график «көтеріңкі» болады. Ал егер $E_k < 0$ болса, онда график «жатыңқы» болады.

X кездейсоқ шамасының берілген аралықтағы мәнді қабылдау ықтималдығын есептеу формуласы:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1), \quad P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

2.2.3 Математикалық күтім пен дисперсияның қасиеттері

1. Тұрақты санның математикалық күтімі тұрақты санның өзіне тең: $M(C) = C,$ мұндағы $C - const$.

2. Кездейсоқ шамалардың қосындысының математикалық күтімі олардың математикалық күтімдерінің қосындысына тең: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

3. Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың көбейтіндісінің математикалық күтімі олардың математикалық күтімдерінің көбейтіндісіне тең: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.

4. Тұрақты санның дисперсиясы нөлге тең: $D(C) = 0,$ мұндағы $C - const$.

5. Тәуелсіз кездейсоқ шамалардың қосындысының дисперсиясы олардың дисперсияларының қосындысына тең: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Мысал 30. Екі симметриялы ойын сүйегі лақтырылған. X – екі ойын сүйегінде түскен ұпай сандарының қосындысы. Екі ойын сүйегінде түскен ұпай сандарының қосындысының математикалық күтімін тап.

Шешуі. y арқылы – бірінші ойын сүйегінде түскен ұпай санын, z арқылы – екінші ойын сүйегінде түскен ұпай санын белгілелік. Онда $x = y + z$ және y пен z - тәуелсіз кездейсоқ шамалар.

Әрбір оқиғаның ықтималдығы: $P(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Кесте құралық:

y/z	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$M(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \ldots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

Мысал 31. X кездейсоқ шамасы үлестірім заңымен берілген:

X	0,1	2	10	20
p	0,4	0,2	0,15	0,25

$\mu_2, \mu_3 = ?$

Шешуі.

$$\nu_1 = M(X) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}25 = 6{,}94,$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 0{,}1^2 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0{,}15 + 400 \cdot 0.25 = 115{,}804,$$

$$\nu_3 = M(X^3) = 0{,}001 \cdot 0{,}4 + 8 \cdot 0{,}2 + 1000 \cdot 0{,}15 + 8000 \cdot 0{,}25 = 215{,}6004,$$

$$\mu_2 = 115{,}804 - (6{,}94)^2 = 67{,}6404,$$

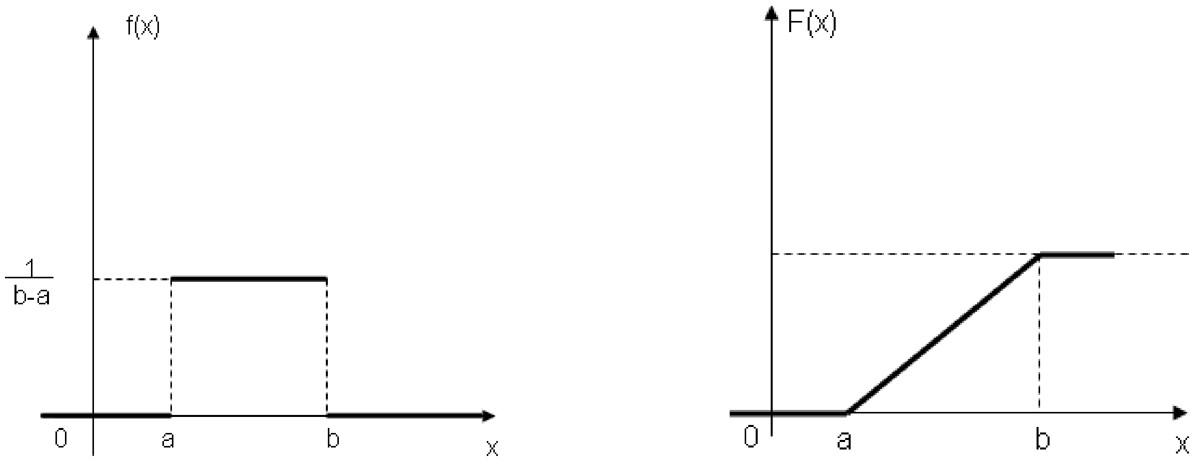
$$\mu_3 = 2151{,}6004 - 3 \cdot 6{,}94 \cdot 115{,}804 + 2 \cdot (6{,}94)^3 = 409{,}072.$$

Онда 6

2.2.4 Кейбір үлестірім заңдары

1. *Бірқалыпты үлестірім заңы.* X кездейсоқ шамасы бірқалыпты үлестірілген болса, оның үлестірім тығыздығы $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0 \;\; , & x \notin [a,b] \end{cases}$, $-\infty < a < b < \infty$ болады.

Бірқалыпты үлестірімінің тығыздығы мен функциясының графигі 13-суретте көрсетілген.



13-сурет

Сандық есептеулер жүргізу кезінде қателікті дөңгелектеу; қозғалыс интервалы тұрақты және қатаң орындалатын болса, ал адамның аялдамаға келуі кездейсоқ уақыт аралығында болған жағдайда транспортты (автобусты, пойызды және т.с.с.) тосу уақыты бірқалыпты үлестірілген. Сондай-ақ, егер қамтамасыздандыру құрылғысы тең уақыт аралықтарында қосылып отыратын болса, онда жаппай қамтамасыз ету жүйесінде кездейсоқ уақыт аралығында түсетін мәлімдемелерді қамтамасыздандыруды тосу уақыты да бірқалыпты үлестірілген болады.

Бірқалыпты үлестірімнің негізгі сандық мінездемелері: математикалық күтім, дисперсия сәйкесінше төмендегі формулалармен анықталады:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}; \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. *Қалыпты үлестірім заңы.* X кездейсоқ шамасы қалыпты заңмен үлестірілген деп аталады, оның үлестірім тығыздығы:

$$f\ (x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}-e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

формуласымен анықталса, мұндағы a дегеніміз - X кездейсоқ шамасының математикалық үміті, σ дегеніміз – орташа квадраттық ауытқу.

Онда оның сәйкес ықтималдығының үлестірім функциясы

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}-e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Қалыпты үлестірімінің тығыздығы мен функциясының графигі 15-суретте көрсетілген.

Қалыпты үлестірім өзінің математикалық күтіміне қатысты симметриялы. Қалыпты үлестірілген X кездейсоқ шамасының модасы, медианасы және математикалық күтімдері өзара тең. Қалыпты заңмен үлестірілген үлестірімнің қисығы Гаусс қисығы деп аталады.

Сондай-ақ, қалыпты үлестірімлен берілген кездейсоқ шаманың берілген интервалдан мән қабылдауының ықтималдығы:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

мұндағы $\Phi(x)$-Лаплас функциясы.

Мына формула

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы δ-дан кіші болуының ықтималдығын анықтайды.

Егер формулада $\delta = 3\sigma$ болса, онда

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3)$$

немесе

$$P(|X - a| < 3\sigma) \approx 0{,}9973,$$

яғни, кездейсоқ шаманың өзінің математикалық күтімінен ауытқуының абсолют шамасы 3σ-дан аспауының ықтималдығы бірге өте жақын екенін көрсетеді.

Осыдан *үш сигма ережесі* шығады:

Егер кездейсоқ шама қалыпты үлестіріммен берілсе, онда оның математикалық күтімінен ауытқуының абсолют шамасы үш орта квадратталған ауытқудан аспайды.

3. *Көрсеткіштік (экспоненциалды) үлестірім заңы. X* кездейсоқ шамасы көрсеткіштік үлестірілген болса, оның үлестірім тығыздығы

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

мұндағы λ - оң тұрақты шама.

Оған сәйкес ықтималдықтың үлестірім функциясы

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, \text{если } x \ge 0 \\ 0, \quad \text{если } x < 0 \end{cases}.$$

Көрсеткіштік үлестірімнің тығыздығы мен ықтималдығының үлестірім функциясы 14-суретте бейнеленген.

Көрсеткіштік үлестірімнің негізгі сандық мінездемелері: математикалық күтім, дисперсия, орташа квадраттық ауытқу сәйкесінше төмендегі формулалармен анықталады:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Экспоненциалды функция жалғыз λ параметріне тәуелді. Оның кейбір сандық мінездемелері де осы λ параметрімен анықталады. Дербес жағдайда, оның математикалық күтімі орташа квадраттық ауытқумен беттеседі.

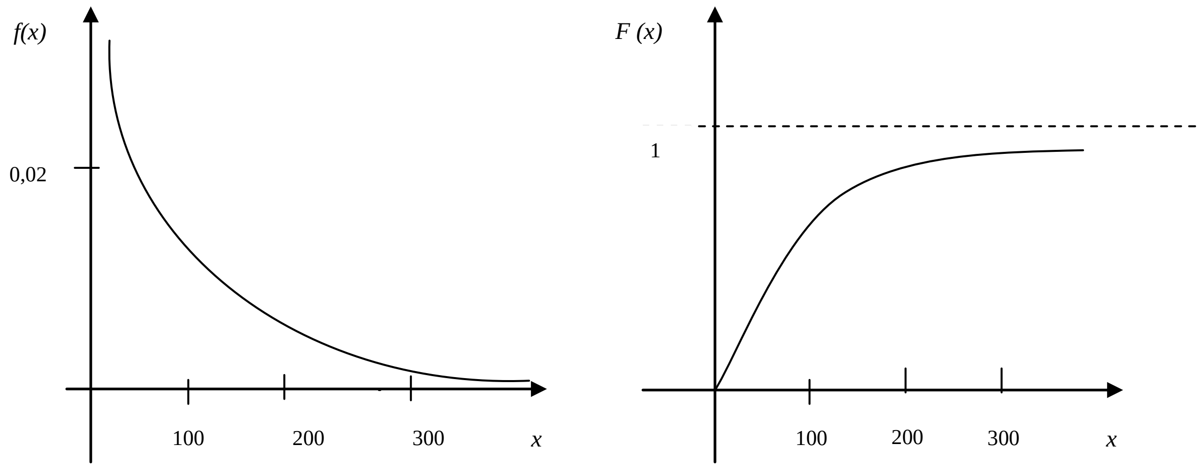
Көрсеткіштік (экспоненциалды) үлестірім сенімділіктер теориясында және жаппай қамтамасыздандыру теориясында кеңінен қолданылады. Көптеген техникалық жүйелердің бұзылмай жұмыс істеуінің кездейсоқ уақыты көрсеткіштік үлестірілген екен. Істен шыққан техникалық жүйенің қайта жөнделу уақыты да көбінде осы көрсеткіштік заңмен үлестірілген екен.

Мысал 32. Қандай да бір құрылғының элементінің бұзылмай жұмыс істеу уақыты көрсеткіштік заңмен үлестірілген:

$$f(t) = 0{,}02 \cdot e^{-0{,}02t}, t \geq 0.$$

Элементтің бұзылмау 100 сағат жұмыс істеу ықтималдығын тап.

Шешуі. Үлестірім заңы мен үлестірім тығыздығының графиктері төмендегідей:



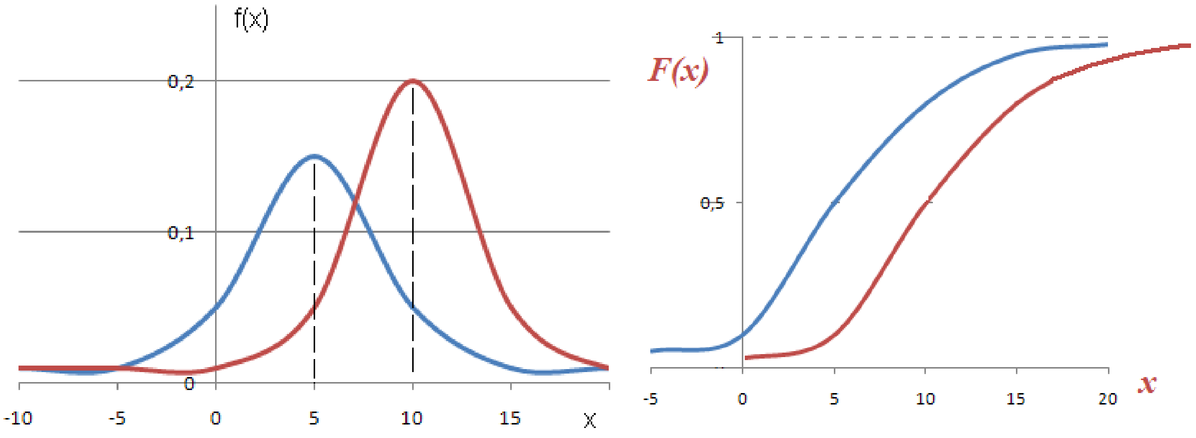
14-сурет

Сенімділік функциясы: $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t),$ мұндағы $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Онда $R(t) = e^{-\lambda t}$, мұндағы $\lambda = 0{,}02$. $F(t) = P(T < t)$ функциясы бұзылу ықтималдығын анықтайды. Ал элементінің бұзылмай жұмыс істеу ықтималдығы: $R(t) = e^{-0{,}02t}$. $t = 100$ сағатта элементінің бұзылмай жұмыс істеу ықтималдығы: $R(100) = e^{-0{,}02 \cdot 100} = e^{-2} \approx 0{,}14.$

Мысал 33. Жалпақтығы 20 м жолақтар түріндегі нысанаға (автострада) автострадаға перпендикуляр бағытта оқ атылып жатыр. Көздеу автостраданың орта сызығынан басталады. Оқ бағытының орташа квадраттық ауытқуы $\sigma(x) = 8м$. Оқты бағыттаудың жүйелік қателігі – жетпей түсуі 3м. Оқ бір рет атылғанда автострадаға тию ықтималдығын есепте.

Шешуі. Автостраданың орта сызығында жатқан кез келген нүктені координатаның бас нүктесі етіп, таңдап аламыз және абсцисса өсін автострадаға перпендикуляр бағыттаймыз. Снарядтың автострадаға тию, тимеуі тек бір X координата – снарядтың түскен нүктесімен анықталады.

X кездейсоқ шамасы қалыпты үлестірілген және: $M(X) = -3, \ \sigma(X) = 8.$ Снарядтың автострадаға тиюі X кездейсоқ шамасының $[-10;10]$ аралығына түсуімен сәйкес . Ықтималдықтың формуласын қолдансақ:



15-сурет

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

онда:

$$P(-10 \le X \le 10) = \Phi\left(\frac{10-3}{8}\right) - \Phi\left(\frac{-10-3}{8}\right) = \Phi(1{,}625) - \Phi(-0{,}875) = 0{,}757.$$

2.3 Сипаттамалық функциялар және олардың қасиеттері

ξ кездейсоқ шамасының $\eta = \varphi(\xi)$ функциясы берілсін. Егер η функциясының сандық сипаттамаларын анықтау қажет болса, онда оның үлестірім заңдылығын тауып қажеті жоқ. ξ кездейсоқ шамасының $p_\xi(x)$ үлестірім тығыздығы берілсе, онда $M\eta$ математикалық күтімін мен $D\eta$ дисперсиясын сәйкес есептеу формулалары:

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) p_\xi(x) dx, \quad D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x) - M\eta]^2 p_\xi(x) dx.$$

Анықтама. ξ кездейсоқ шамасының $\varphi(t)$ сипаттамалық функциясы деп $e^{it\xi}$ шамасының математикалық күтімін айтамыз:

$$\varphi(t) = Me^{it\xi}, \ t \text{ - нақты параметр.}$$

Дискретті және үзіліссіз шамалар үшін сәйкесінше:

$$\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k, \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx.$$

Сипаттамалық функцияның қасиеттері

1. ξ кездейсоқ шамасының $\varphi(t)$ сипаттамалық функциясы кез келген $t \in (-\infty, \infty)$үшін анықталған. әрі $|\varphi(t)| \le 1, \varphi(0) = 1.$

2. Аргументтің таңбасы өзгерсе, сипаттамалық функцияның мәні комплексті-түйіндес мәнге ауысады:
$\varphi(-t) = \overline{\varphi}(t), \; -\infty < t < \infty.$

3. Егер кездейсоқ шамалар $\xi_2 = k\xi_1 + b$ өрнегімен байланыста болса, онда:

$$\varphi_{\xi_2}(t) = e^{itb}\varphi_{\xi_1}(kt)$$

4. Егер ξ, η - тәуелсіз кездейсоқ шамалар болса, онда $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta}(t)$.

5. Егер $M\xi$ бар болса, онда $M\xi = \varphi'(0)/t;$ жалпы жағдайда, $M\xi^k$ бар болса, онда $M\xi^k = i^{-k}\varphi^{(k)}(o)$.

6. Үлестірім функциялары жиыны мен сипаттамалық функциялар арасындағы $\varphi(t) = Me^{it\xi}$ формуласымен құрылған сәйкестік өзара бірмәнді (жалғыздық теоремасы) немесе үзіліссіз (Левидің шектік теоремасы)

2.4 Үлкен сандар заңы

Сынақтардың саны үлкен болғанда олардың ортақ нәтижелерінің орнықтылығын үлкен сандар заңы ретінде ұғуға болады.

Чебышев теоремасы. $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ қос – қостан тәуелсіз кездейсоқ шамалары және $D(X_i) \le C, i = 1,2,...,$мұндағы C - кез-келген тұрақты. Онда кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

теңдігі орынды.

Марков теоремасы. $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ кездейсоқ шамалары $n \to \infty$ үшін $\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to 0$ теңдігін қанағаттандыратын болсын. Онда $\varepsilon > 0$ үшін

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

теңдігі орынды.

Бернулли теоремасы. n тәуелсіз сынақ кезінде m сәтті жағдай және әрқайсысында ықтималдық p - ға тең болсын. Онда $\varepsilon > 0$ үшін

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

теңдігі орынды.

Теоремалардың дәлелдеулері кез-келген $\varepsilon > 0$ үшін ақырлы математикалық күтімі $M(X)$ мен ақырлы дисперсиясы $D(X)$ бар X кездейсоқ шамасы қанағаттандыратын $P\{|X - M(X)| \ge \varepsilon\} \le D(X)/\varepsilon^2$ Чебышев теңсіздігіне сүйенеді.

Мысал 34. Чебышев теңсіздігін қолданып, X кездейсоқ шамасының өзінің $M(X)$ математикалық күтімінен $N\sigma$-дан кем ауытқуының ықтималдығын бағала, мұндағы $\sigma = \sqrt{D(X)}$, $D(X)-$дисперсия, N – нұсқа нөмірі.

Шешуі. N = 31 және $\varepsilon = N\sigma$ болсын.$|X - M(X) \geq \varepsilon|$, $|X - M(X)| < \varepsilon -$ оқиғалары қарама-қарсы оқиғалар, ендеше

$$P\{|X - M(X)| \geq N\sigma\} + P\{|X - M(X)| < N\sigma\} = 1,$$

онда Чебышев теңсіздігінен

$$1 - P\{|X - M(X)| < N\sigma\} = P\{|X - M(X)| \geq N\sigma\} \leq \frac{D(X)}{N^2\sigma^2}$$

екені шығады. Бұдан:

$$P\{|X - M(X)| < N\sigma\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{N^2\sigma^2} \approx 0{,}9979,$$

$$0{,}9979 \leq P\{|X - M(X)| < 31\sigma\} \leq 1.$$

2.5 Бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар үшін орталық шектік теорема

$X_1, X_2, ..., X_n, ...$- математикалық күтімдері $M(X_i) = a$ мен ақырлы дисперсиясы $D(X_i) = \sigma^2$ бар тәуелсіз бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар болсын. Онда $n \to \infty$ болғанда $\eta_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)/\sigma\sqrt{n}$ нормаланған қосындысының үлестірім функциясы кез-келген x үшін (0,1) параметрлері болатын қалыпты кездейсоқ шаманың үлестірім функциясына жинақталады, яғни, кез-келген x үшін

$$P\{\eta_n < x\} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}dz} . \qquad (7)$$

Соңғы теңдіктен n - нің үлкен мәндері үшін жуықтау формуласын алуға болады:

$$P\{x_1 < \eta_n < x_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$x_2 < \eta_n < x_1$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын ықтималдықтың интегралы (2-қосымшадағы 2-кесте) бойынша өрнектейді.

2.6 Есеп шығару үлгілері

Есеп 1. X кездейсоқ шамасының $f(x)$ үлестірім тығыздығы берілген. γ параметрін, *M(X)* математикалық күтімін, *D(X)* дисперсиясын, X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын, $P(x_1 < X < x_2)$ теңсіздігі орындалу ықтималдығын табыңыз:

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in\left[\frac{b-\gamma}{2},\frac{b+\gamma}{2}\right] \\ 0, & x\notin\left[\frac{b-\gamma}{2},\frac{b+\gamma}{2}\right]\end{cases}.$$

Берілгені: $a=0{,}05,\quad b=4,\quad x_1=0,\quad x_2=10.$

Табу керек: γ =? $M(X)$ =? $D(X)=?$ $f(x)=?$ $P(x_1<X<x_2)-?$

Шешуі. X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығының $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ қасиетін қолданып, γ параметрін анықтаймыз:

$$\int\limits_{\frac{b-\gamma}{2}}^{\frac{b+\gamma}{2}} f(x)dx=\int\limits_{\frac{b-\gamma}{2}}^{\frac{b+\gamma}{2}} adx=1\Rightarrow ax\Big|_{\frac{b-\gamma}{2}}^{\frac{b+\gamma}{2}}=a\left(\frac{b+\gamma}{2}-\frac{b-\gamma}{2}\right)=1,\Rightarrow a\left(\frac{b+\gamma-b+\gamma}{2}\right)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\gamma=1\Rightarrow\gamma=\frac{1}{a}=\frac{1}{0{,}05}=20.$$

Егер $\gamma=20$ болса, онда үлестірім тығыздығының түрі:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}05, x\in[-8;12], \\ 0, x\notin[-8;12].\end{cases}.$$

Енді кездейсоқ шаманың сандық сипаттамаларын есептейік:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)=\int\limits_{-8}^{12} 0{,}05xdx=0{,}05\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{8}^{12}=\frac{1}{20}(72-32)=2$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx=\int\limits_{-8}^{12} 0{,}05(x-2)^2dx=\frac{1}{20}\cdot\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_{-8}^{12}=\frac{100}{3}.$$

$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ формуласын қолданып, X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын анықтайық:

$$F(x)=\int\limits_{-8}^{x} 0{,}05dx=0{,}05x\Big|_{-8}^{x}=0{,}05(x+8).$$

$P(x_1<X<x_2)$ теңсіздігі орындалу ықтималдығын анықтау формуласы:

$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1).$$

Бұдан

$$P(0<X<10)=F(10)-F(0)=0{,}05(10-8+8)=0{,}5$$

немесе $P(0<X<10)=0{,}5$.

Жауабы: $\gamma=20;\quad M(X)=2;\quad D(X)=\frac{100}{3};\ F(x)=0{,}05(x+8),$

$P(0<X<10)=0{,}5$.

Есеп 2. X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығының түрі: $f(x)=\gamma e^{ax^2+bx+c}$. γ параметрін, *M(X)* математикалық күтімін, *D(X)* дисперсиясын, *X* кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын, $P(x_1<X<x_2)$ теңсіздігі орындалу ықтималдығын табыңыз.

Берілгені: $a=-1, b=2, c=3, \ x_1=-\frac{1}{3}, x_2=\frac{4}{3}$.

Табу керек: $\gamma-?, M(X)-?, \sigma-?, F(x)-?, P(x_1<X<x_2)-?$

Шешуі. Үлестірім тығыздығының формуласы бойынша

$$f(x)=\gamma\cdot e^{-x^2+2x+3}=\gamma\cdot e^{-((x-1)^2-4)}=\gamma\cdot e^4\cdot e^{-(x-1)^2}.$$

Үлестірім тығыздығының қасиетін қолданып, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$, γ параметрін табайық: $\gamma\cdot e^4\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-1)^2}dx=1$. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-1)^2}dx$ интегралын Пуассон интегралына келтірейік:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}\Rightarrow\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-1)^2}dx=\left|\begin{matrix}x-1=\dfrac{z}{\sqrt{2}}\\ dx=\dfrac{dz}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right|=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{dz}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\pi}.$$

Бұдан $\gamma\cdot e^4\cdot\sqrt{\pi}=1\Rightarrow\gamma=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4}$. γ параметрінің табылған мәнін $f(x)$ үлестірім тығыздығына қойып,

$$f(x)=\gamma\cdot e^4\cdot e^{-(x-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4}\cdot e^4\cdot e^{-(x-1)^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-1)^2}.$$

аламыз. $M(X)$ математикалық күтімін анықтау үшін $f(x)$ үлестірім тығыздығының табылған X үзіліссіз кездейсоқ шамасының қалыпты үлестірім тығыздығының формуласымен салыстырып,

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

аламыз, мұндағы $a=M(X)$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

Ендеше $M(X)=1$, $D(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Үлестірім функциясын анықтайық:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-(x-1)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{1}e^{-(x-1)^2}dx+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{1}^{x}e^{-(x-1)^2}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{1}^{x}e^{-(x-1)^2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}x-1=\dfrac{z}{\sqrt{2}}\\ dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}dz\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\sqrt{2}(x-1)}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2}+\varPhi\left(\sqrt{2}(x-1)\right).$$

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ екендігін ескерсек, онда $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\sqrt{2}(x-1)\right)$ аламыз. 2-қосымшадағы 2-кестені қолданып, $\Phi(x)$ функциясы үшін $P\left(-\frac{1}{3}<X<\frac{4}{3}\right)$ есептейік:

$$P\left(-\frac{1}{3}<X<\frac{4}{3}\right)=F\left(\frac{4}{3}\right)-F\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)-\frac{1}{2}-\Phi\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+\Phi\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=$$
$$=\Phi(1{,}89)+\Phi(0{,}47)\approx 0{,}47+0{,}18=0{,}65.$$

Жауабы: $\gamma=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-4},\ M(X)=1,\ \sigma=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\sqrt{2}(x-1)\right),$
$P\left(-\frac{1}{3}<X<\frac{4}{3}\right)\approx 0{,}65.$

Есеп 3. Кездейсоқ шаманың берілген Пуассон үлестірім заңдылығы бойынша $\varphi(t)$ сипаттамалық функциясын, *M(X)* математикалық күтімін, *D(X)* дисперсиясын табыңыз.

Берілгені: $\lambda=0{,}57$.

Табу керек: $\varphi(t), M(X), D(X)$-?

Шешуі. Пуассон заңы: $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $a=0{,}57$, $k=0,1,2,...$

Сипаттамалық функцияның анықтамасы бойынша

$$\varphi(t)=Me^{itX},M(X)=\sum_{k=0}^{\infty}X_kP_k.$$

Берілгендерді қолданып, есептейік:

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itX}P_k=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!}.$$

Жіктеудің белгілі формулаларын қолданып, $e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$, бұдан

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}a)}{k!}=e^{e^{it}a}$$

теңдігін аламыз. Онда ізделінді функция

$$\varphi(t)=e^{-a}e^{ita}=e^{a(e^{it}-1)}\text{ ал }\lambda=0{,}57\text{, онда }\varphi(t)=e^{0{,}57(e^{it}-1)}.$$

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty}X_kP_k=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda\Rightarrow M(X)=0{,}57$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\lambda^2=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}-\lambda^2=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}-\lambda^2=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}-\lambda^2=$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}-a^2=a^2+a-a^2=a\Rightarrow D(X)=0{,}57.$$

Жауабы: $\varphi(t)=e^{0,57(e^{it}-1)}, M(X)=D(X)=0{,}57$.

Есеп 4. X кездейсоқ шамасы қалыпты үлестірілген: $M(X)=2{,}7$ және $D^2(X)=1{,}5$. Осы үлестірім заңы бойынша $\varphi(t)$ сипаттамалық функциясын табыңыз.

Шешуі. X кездейсоқ шамасы қалыпты үлестірілгендіктен, оның үлестірім тығыздығы:

$$f(x)=\frac{1}{1{,}5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2,7)^2}{4,5}}.$$

$\varphi(t)=Me^{itX}$ формуласы бойынша сипаттамалық функцияны анықтайық.

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} itx-\dfrac{(x-a)}{2\sigma^2}=\dfrac{2\sigma^2itx-x^2+2xa-a^2}{2\sigma^2}= \\ =\dfrac{x^2-2(a+\sigma^2it)x+(a+\sigma^2it)^2-(a+\sigma^2it)^2}{2\sigma^2}= \\ =-\dfrac{(x-a-bit)^2}{2\sigma^2}+\dfrac{2abti-b^2t^2}{2\sigma^2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{bt(2a+bt)}{2\sigma^2}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(xa-bit)}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{c}\dfrac{x-a-bit}{\sigma}=z\\ dx=\sigma dz\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{bt(2a+bt)}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{t(2a+bt)}{2}},$$

бұдан $\varphi(t)=\frac{2}{3}e^{-t\,(2,7+0,75\,t)}$ - ізделінді сипаттамалық функциясын аламыз.

Есеп 5. Чебышев теңсіздігін қолданып, X кездейсоқ шамасының $M(X)$ математикалық күтімінен ауытқуы σ-дан кем емес, мұндағы $\sigma=\sqrt{D(X)}$ - X кездейсоқ шамасының орташа квадраттық ауытқуы; $D(X)$ – дисперсиясы; $N=4$, $\varepsilon=N\sigma$.

Табу керек: $P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)-?$ $P(|X-M(X)|<\varepsilon)-?$

Шешуі. $|X-M(X)|\geq\varepsilon$ және $|X-M(X)|<\varepsilon$ оқиғалары қарама-қарсы болғандықтан, онда ықтималдықтарының қосындысы 1-ге тең:

$$P\{|X-M(X)|\geq N\sigma\}+P\{|X-M(X)|<N\sigma\}=1.$$

Чебышев теңсіздігінің көмегімен:

$$1-P\{|X-M(X)|<N\delta\}=P\{|X-M(X)|\geq N\delta\}\leq\frac{D(X)}{(N\delta)^2}$$

теңдігін аламыз. Ендеше,

$$P\{|X-M(X)|<N\sigma\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{N^2\sigma^2}=1-\frac{1}{16}=0{,}9375;$$

(яғни, $\sigma(x)=\sqrt{D(X)}$).

Сонымен, нәтижеде

$$0{,}9375\leq p\{|X-M(X)|<4\sigma\}\leq 1.$$

Жауабы: $0{,}9375\leq p\{|X-M(X)|<4\sigma\}\leq 1.$

Есеп 6. X_i кездейсоқ шамалары бірдей ықтималдықпен i^2 немесе $-i^2$ мәндерінің біреуін қабылдайды. Өзара тәуелсіз кездейсоқ шамалар $X_1, X_2,...,X_i$ тізбегі үлкен сандар заңын қанағаттандыра ма:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1,\quad \varepsilon>0\cdot \tag{2}$$

Есепті α_1,α_2 үшін шеш.

Шешуі. $\alpha_1=-1{,}8,\ \alpha_2=0{,}42$ деп алайық. Есеп шарты бойынша $P(X=i^\alpha)=P(X=-i^\alpha)=P,$ онда $M(X)=pi^\alpha+p(-i^\alpha)=0,$ сонымен (2) формуласында:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|X_i|=\sum_{i=1}^{\infty}i^\alpha;\quad \sum_{i=1}^{\infty}i^{-1,8},\sum_{i=1}^{\infty}i^{0,42}$$

қатары қалады. $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1,8}}$ – қатары жинақты, себебі $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ – белгілі Дирихле қатары, және ол $p>1$ болғанда жинақты да, $p<1$ жинақсыз.

$\sum_{i=1}^{\infty}i^{0,42}$ – қатары жинақсыз, себебі $i\to\infty$ болғанда $\mathrm{i}^{0,42}\to\infty$. Бұдан, $\alpha=-1{,}8$ болғанда $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}X_k=0$, ал екінші жағдай үшін $\alpha=0{,}42$ болғанда, бұл шарт орындалмайды.

Жауабы: $\alpha=-1{,}8$ болғанда үлкен сандар заңы орындалады, ал $\alpha=0{,}42$ болғанда үлкен сандар заңы орындалмайды.

Есеп 7. $[0,\alpha]$ кесіндісінен кез келген n сан таңдап алынған, анығырақ айтсақ, $[0,\alpha]$ кесіндісінде бірқалыпты үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ шамаларын $X_1, X_2,...,X_n$ қарастырамыз. Олардың қосындысы x_1 мен x_2 аралығында болу ықтималдығын тап, яғни, $P\{x_1\leq\sum_{i=1}^{n}X_i<x_2\}-?$

Берілгені: $\alpha=\frac{3}{2}$, $n=162$, $x_1=132$, $x_2=156$.

Табу керек: $P\left(x_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<x_2\right)$-?

Шешуі. $M(X_i)=a$ және $D(X_i)=\sigma^2$ сандық сипаттамаларымен бірдей үлестірілген кездейсоқ шамаларға арналған орталық шектік теорема үшін $n\to\infty$ ұмтылғанда нормаланған қосындының $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i-a}{\tau\sqrt{n}}$ үлестірім функциясы $a=0$, $D(X)=1$ параметрлерімен қалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың үлестііму функциясына ұмтылады. Онда жуықтау формуласы орынды болады:

$$P\left(x_1<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i-a}{\tau\sqrt{n}}<x_2\right)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1).$$

$\alpha=\frac{3}{2}$, $n=162$, $x_1=132$, $x_2=156$ есеп шартын ескерсек, онда бірқалыпты үлестірілген кездейсоқ шаманың үлестірім тығыздығын аламыз:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3},\ \textit{егер}\ \ x\in\left[0,\frac{3}{2}\right],\\ 0,\ \textit{егер}\ \ x\notin\left[0,\frac{3}{2}\right].\end{cases}$$

Математикалық күтімін есептейік: $M(X_i)=\frac{2}{3}\int_0^{3/2}xdx=\frac{3}{4}$,

$$D(X_i)=\frac{2}{3}\int_0^{3/2}(x-\frac{3}{4})^2dx=\frac{3}{16}\Rightarrow\sigma=\sqrt{D(X_i)}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Онда

$$P\left(x_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<x_2\right)=P\left(\frac{x_1-na}{\sigma\sqrt{n}}<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{X_i-a}{\tau\sqrt{n}}<\frac{x_2-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{x_2-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-na}{\sigma\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{156-162\cdot\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{162}}\right)-\Phi\left(\frac{132-162\cdot\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{162}}\right)=\Phi\left(\frac{23\sqrt{6}}{9}\right)-\Phi\left(\frac{7\sqrt{6}}{9}\right)=\Phi(6{,}26)-\Phi(1{,}91)\approx$$

$$\approx 0{,}5-0{,}47=0{,}03$$

Жауабы: $P\left(132<\sum_{i=1}^{n}X_i<156\right)\approx 0{,}03$.

2.6 Қайталауға арналған сұрақтар

1. Кездейсоқ шамалар. Кездейсоқ шамалардың үлестірім функциясы және оның қасиеттері.
2. Дискретті және үзіліссіз кездейсоқ шамалар. Сандық сипаттамалары.
3. Математикалық күтім және дисперсияның қасиеттері.
4. Кездейсоқ шаманың сипаттамалық функциясы. Қасиеттері.
5. Бірдей үлестірілген қосылғыштар үшін орталық шектік теорема.
6. Үлкен сандар заңы. Чебышев, Марков, Бернулли теоремалары.

3 МАТЕМАТИКАЛЫҚ СТАТИСТИКА

3.1 Негізгі есептер

Бірнеше кездейсоқ құбылыстар бағынатын заңдылықтарды құру статистикалық берілгендерді (бақылау нәтижелерін) оқуға негізделген. Математикалық статистиканың негізгі есебі - статистикалық мағлұматтарды жинау мен топтау әдістерін көрсету. Математикалық статистиканың жоғарыда айтылғаннан басқа есебі – зерттеу мақсатына байланысты статистикалық берілгендерді құру әдістерін талдау.

3.2 Зерттеудің таңдамалық әдісі ұғымы

Зерттелінетін нысандар жиынтығын толығымен зерттейтін әдістер бар, яғни, әрбір нысан өзінің белгілеріне байланысты зерттелінеді. Тәжірибе жүзінде бұл әдістер жиі қолданылмайды. Егер бұл әдіс зерттелетін нысандар саны үлкен болса қолданылмайды. Тәжірибеде кеңінен таралған және жиі қолданылатын әдіс – таңдамалық әдіс.

Таңдамалық әдіс қандай да бір статистикалық жинақтың барлық емес, тек таңдап алынған мүшесінің құрама бөлігін ғана бақылау нәтижесінде сипаттамаларын (көрсеткіштерін) анықтаудан тұрады. Мысалы, электр шамдарының қызмет етуге жарамдылығының орташа уақытын анықтау үшін өте көп электр шамдарының ішінен салыстырмалы түрде біраз (көп емес) бөлігі ғана алынып, сыналады. Сыналған шамдардың орташа қызмет етуге жарамдылық уақыты жуық шамамен барлық электр шамының қызмет етуге жарамдылық уақыты ретінде алынады. Көлемі N болатын жинақтан n бірлікті таңдап алу «репрезентативті» болуы қажет, яғни, «таңдамаға» енетін мүшелердің қасиеті сәйкес барлық жинақтың қасиеттерін дұрыс бейнелеуі қажет. Үлкен сандар заңы бойынша кең ауқымды таңдама репрезентативті болады, егер оны кездейсоқ жүзеге асыратын болсақ: таңдаманың әрбір нысаны бас жинақтан кездейсоқ алынған және осы таңдамаға енуі үшін барлық нысанның ықтималдықтары өзара тең болса. N нысаннан кез келген n бірлікті жеребе көмегімен алуға болады. Тәжірибеде таңдаудың әртүрлі әдістері қолданылады, мысалы, қарапайым, кездейсоқ қайталанбайтын таңдау, қарапайым кездейсоқ қайталау, типтік, механикалық, бөлімдік және т.б.

Типтік таңдама зерттелінетін жинақты топтың қандай да бір белгісіне және қандай да бір ережеге байланысты мүшелерін бөлу көмегімен типке бөлуге негізделген. Бұл үшін әрбір топтың ішінде таңдау кездейсоқ жүргізілуі қажет.

Механикалық таңдама зерттелінетін жинақты механикалық тәсілмен топтарды таңдауға негізделген (мысалы, жинақтың әрбір 10-шы немесе 20-шы мүшесі).

Бөлімдік таңдама зерттелінетін жинақтан мүшелерінің бүтін тобын (бөлімін) таңдауға негізделген және әрбір топ толық зерттеуге түседі (яғни, жинақтың барлық мүшелерін зерттеу). Бөлімдік таңдаманы, зерттеу белгісі әр бөлімде анық болмай тербелмелі түрде болған жағдайда қолданамыз.

3.2.1 Математикалық теорияның таңдамалық әдісінің негізгі есебі

Анықтама. Бақылау және зерттеу объектілерінің барлық жиынын *бас жинақ* деп айтамыз.

Анықтама. Алынған кез келген нысандар жиынын *таңдама жиынтығы* деп айтамыз.

Анықтама. Таңдама жиынтығындағы (немесе генералды жиынтықтағы) нысандар санын *таңдаманың көлемі* деп айтамыз.

Мысал 35. 10000 заттың ішінен бақылауға 100 зат алынған. N=10000 – бас жинақ, ал n=100 – таңдаманың көлемі болады.

Көбінде, бас жинақ нысандардың ақырлы жинағынан тұрады. Бірақ, ол өте үлкен болғандықтан, теориялық қорытынды бойынша бас жинақтың көлемі шексіз деп алынады. Бұл бас жинақтың көлемінің артуы берілген таңдамамен жұмыс істеу нәтижесінде ескерілмейді дегенді білдіреді.

*Анықтама.*Таңдаманың вариациялық қатары деп элементтері шамасы бойынша реттелген, яғни, $x^{(1)}, x^{(2)},..., x^{n}$ түрінде жазылған, мұндағы $x^{(1)} \le x^{(2)} \le ... \le x^{n}$, қатарды айтамыз. Көлемі n болатын таңдамада x_i элементі k_i рет кездессін, онда k_i саны x_i элементінің жиілігі деп аталады және $\sum_i k_i = n.$

Анықтама. Статистикалық қатар деп (x_i, k_i) жұптар тізбегін айтамыз. Көбінде, статистикалық қатар кесте түрінде жазылады, бірінші жолы x-тің мәндерінен тұрады, ал екінші жолы – сәйкес жиіліктен тұрады. Таңдаманың статистикалық үлестірімін, сонымен қатар, аралықтар тізбегі мен оларға сәйкес жиіліктері арқылы беруге болады (осы аралыққа түсетін варианталардың жиіліктерінің қосындысы).

Мысал 36. Таңдама берілген: 3,8,1,3,6,5,2,2,7. Бұл таңдаманы вариациялық қатар түрінде және статистикалық қатар түрінде жаз.

Шешуі. Вариациялық қатардың анықтамасын қолданып, 1,2,2,3,3,5,6,7,8 жазамыз.

Көлемі n=9 екенін ескерсек статистикалық қатар мына түрде болады:

X	1	2	3	5	6	7	8
n	1	2	2	1	1	1	1

Немесе қатысты жиілікке байланысты:

X	1	2	3	5	6	7	8
n_i / n	1/9	2/9	2/9	1/9	1/9	1/9	1/9

Бақылау: $\sum \frac{n_i}{n} = 1.$

Мысал 37. 55 бақылау таңдамасын жиілік кестесі түрінде жаз, топтау үшін жеті аралық қолдан:

17	19	23	18	21	15	16	13	20	18	15
20	14	20	16	14	20	19	15	19	16	19
15	22	21	12	10	21	18	14	14	17	16
13	19	18	20	24	16	20	19	17	18	18
21	17	19	17	13	17	11	18	19	19	17

Шешуі. Ең үлкен және ең кіші элементтің айырымы 24-10=14, онда аралық қадамы 14/ 7=2 болады, таңдама көлемі 55. Кесте құралық:

Аралық саны	шекаралар	жиіліктер	Қатысты жиілік
1	10 - 12	2	0,0364
2	12 - 14	4	0,0727
3	14 - 16	8	0,1455
4	16 - 18	12	0,2182
5	18 – 20	16	0,2909
6	20 – 22	10	0,1818
7	22 - 24	3	0,0545
		Σ=55	Σ=1

3.3 Үлестірімнің эмпирикалық функциясы

Бас жинақтың нысандары үшін қандай да бір сандық мінездеме анықталады – бұл әрбір нысанда қандай да бір сандық мән қабылдайтын кездейсоқ шама *X*. Жүргізілген *n* бақылаудың нәтижесінде, осы кездейсоқ шама *X* -тың мәндерінің қатарын аламыз: $x_1, x_2, ..., x_n$. Осы мәндер тізбегінен кездейсоқ шама *X* -тың үлестірім функциясын, математикалық күтімін және дисперсиясын мөлшермен қандай болатынын жорамалдауға болады.

1933 жылы совет математигі В.И. Гливенко математикалық статистиканың негізгі теоремасын дәлелдеді. Бұл теоремада *X* кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын жуықтап алу ережесі көрсетілген. Оның мағынасы мынада: кез келген нақты x саны үшін, $x_1,...,x_n$ таңдамасынан алынған $x_n < x$ теңсіздігін қанағаттандыратын x_n санының қатысты жиілігін $n(x)$ деп белгілейміз. Сонымен, барлық сан түзуінде $n(x)$ функциясы берілген.

Анықтама. $F^*(x) = \frac{n(x)}{n}$ функциясы X кездейсоқ шаманың таңдамасының эмпирикалық үлестірім функциясы деп аталады.

Бас жинақтың $F(x)$ үлестірім функциясын таңдаманың эмпирикалық үлестірім функциясынан айыру үшін оны теориялық үлестірім функциясы деп атайды. Эмпирикалық және теориялық функциялардың айырмашылығы: $F(x)$ теориялық үлестірім функциясы $X < x$ оқиғасының ықтималдығын анықтайды, ал $F^*(x)$ эмпирикалық үлестірім функциясы осы оқиғаның қатысты жиілігін анықтайды. Бернулли теоремасы бойынша $X < x$ оқиғасының қатысты жиілігі, яғни, $F^*(x)$ ықтималдығы бойынша осы оқиғаның $F(x)$ ықтималдығына ұмтылады. Басқаша айтсақ, $F^*(x)$ пен $F(x)$ функцияларының бір-бірінен айырмашылықтары өте кішкентай. Бұдан таңдаманың эмпирикалық үлестірім функциясын бас жинақтың теориялық (интегралдық) үлестірім функциясын жуықтап беру үшін қолдануға болады.

Үлестірімнің эмпирикалық функциясының қасиеттері:

1. Эмпирикалық функцияның мәндері: $F^\bullet(x) \in [0,1]$.

2. $F^*(x)$ - кемімелі емес функция.

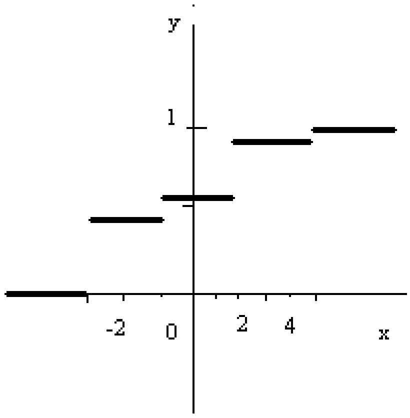
3. Егер $x_{\min}$ - ең кіші варианта болса, ал $x_{\max}$ - ең үлкен варианта болса, онда $F^*(x) = 0$ болады, егер $x < x_{\min}$ және $F^*(x) = 1$ болады, егер $x > x_{\max}$.

Мысал 38. Таңдама нәтижесінде -3,+2,-1,-3,+5,-3,+2. Үлестірімнің эмпирикалық функциясының графигін сыз.

Шешуі. $n = 7,\ x_1 = x_4 = x_6 = -3;\ x_3 = -1; x_5 = 5;\quad x_2 = x_7 = 2$.

$$n(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 3, & -3 < x < -1 \\ 4, & -1 \le x < 2 \\ 6, & 2 \le x < 5 \\ 7, & x \ge 5 \end{cases} \Rightarrow F^*(x) = \frac{n(x)}{n} = \begin{cases} 0, & x \le -3 \\ \frac{3}{7}, & -3 < x \le -1 \\ \frac{4}{7}, & -1 \le x < 2 \\ \frac{6}{7}, & 2 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

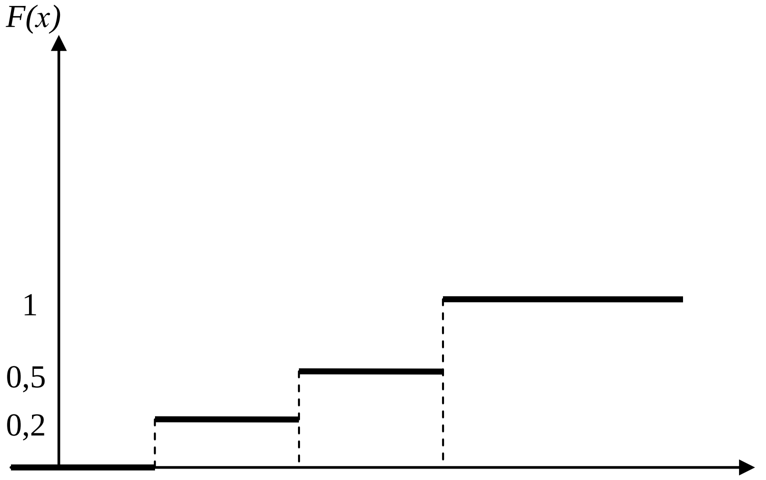
Мысалда үлестірімнің эмпирикалық функциясының негізгі ерекшеліктері көрініп тұр. Теория жүзінде айтып өткендей, ол кемімелі емес және оның мәндері $[0;1]$ аралығына тиісті. Эмпирикалық функция таңдаманың қандай ретпен жасалғанына тәуелсіз, яғни, тізбектегі $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарының қандай ретпен орналасқанына тәуелсіз (16-сурет).



16-сурет

Мысал 39. Берілген таңдаманың эмпирикалық функциясын тап:

X	1	4	6
n	10	15	25



17-сурет

Шешуі. Таңдаманың көлемі: n=10+15+25=50. Ең кіші варианта 1, ендеше, $F^*(x)=0$ болады, егер $x \le 1$ болса. x<4 болғандағы мәні, яғни, x=1 болғанда 10 бақылау жүргізілген, ендеше, $F^*(x)$=10/50=0,2 болады, егер 1< x ≤4. x < 6 болғандағы мәні, яғни, x=1 және x=4 болғанда барлығы 10+15=25 бақылау жүргізілген, ендеше $F^*(x)$=25/50=0,5 болады, егер 4< x ≤ 6 болса. Ал, x=6 ең үлкен варианта болғандықтан, $F^*(x)$=1 болады, егер x > 6 болса. Сонымен, ізделінді үлестірімнің эмпирикалық функциясы мына түрде болады:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 0{,}2; & 1<x\le 4,\\ 0{,}5; & 4<x\le 6,\\ 1; & x>6.\end{cases}$$

Ал оның графигі 17-суретте бейнеленген.

3.4 Полигон және гистограмма

Үлестірімнің эмпирикалық функциясынан басқа ықтималдықтың тығыздық функциясының аналогын бейнелеу де пайдалы болады. Бұл екі тәсілмен жүзеге асады. Әрбір x_k үшін n_k жиіліктерін санаймыз. Бұл мәндерді координата жазықтығында бейнелесек, сынық пайда болады. Пайда болған сынық жиіліктер полигоны деп аталады. Бұл график әрбір мәннің қаншалықты жиі кезігетіндігін көрсетеді. Жиіліктің орнына көбінде қатысты жиілік $\frac{n_k}{n}$ алынады және оған сәйкес полигон салынады.

Енді жиілік (қатысты жиілік) гистограммасы деген не, соған тоқталайық. Оны салу үшін, барлық $[x_{\min}, x_{\max}]$ аралығы ұзындықтары h болатын тең бөліктерге бөлінеді. Олардың әрбіреуі үшін осы аралыққа түсетін бақылау мәндерінің саны саналады. Егер Δl_S аралығындағы мәндер саны n_S болса, онда табаны Δl_S және биіктігі $\frac{n_S}{n}$ болатын тік төртбұрыш салынады. Сөйтіп, жиіліктің гистограммасын саламыз. Барлық көпбұрыштардың ауданы барлық бақылау құбылысының санына тең, яғни, таңдаманың көлеміне тең.

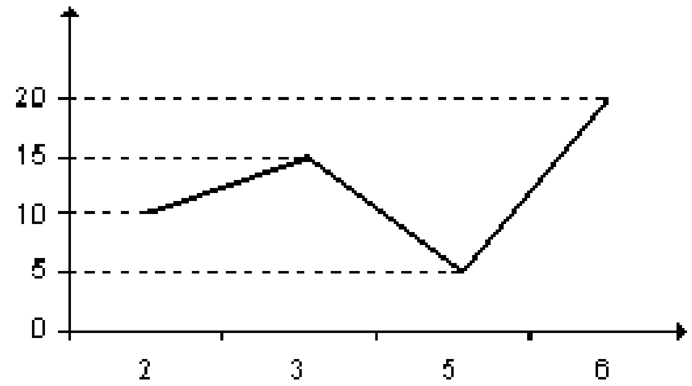
Анықтама. Жиіліктің гистограммасы деп табандары ұзындықтары h (бөлік аралықтар ұзындығы), ал биіктіктері - $\frac{h_S}{h}$ (жиілік тығыздығы) болатын тік төртбұрыштардан тұратын баспалдақты фигураны айтамыз. Жиілік гистограммасының ауданы таңдаманың көлеміне тең.

Гистограммадан кездейсоқ шаманың ықтималдығының тығыздығының неге тең екенін байқай аламыз, ал үлестірімнің эмпирикалық функциясынан үлестірімнің теориялық функциясын жуықтап алуға болады.

Мысал 40. Берілген таңдама бойынша жиіліктің полигонын сал:

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

Шешуі. OX осіне x_i мәндерін, ал ордината осіне сәйкес n_i жиіліктерін саламыз. Алынған нүктелерді кесінділер арқылы қоссақ, ізделінді жиілік полигоны шығады (18-сурет).



18-сурет

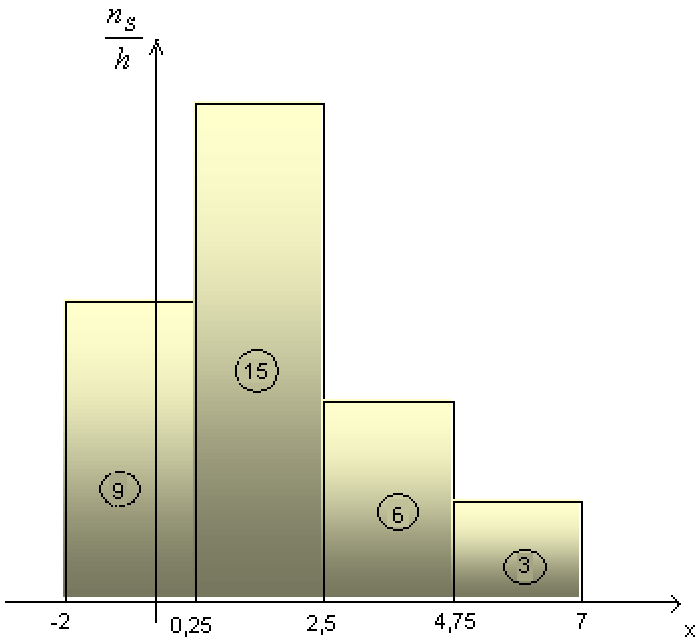
Мысал 41. Берілген таңдама бойынша жиіліктің гистограммасын сал:

x_i мәні	-2	0	1	2	3	5	7
n_i жиілігі	4	5	7	8	6	2	1

Шешуі: $\Delta l = 7-(-2)=9, \quad \Delta l_S = h = \dfrac{9}{4} = 2{,}25.$

Аралық	[-2;0,25]	[0,25;2,5]	[2,5;4,75]	[4,75;7]
n_S	9	15	6	3
$\dfrac{n_S}{h}$	4	$\dfrac{20}{3}$	$\dfrac{8}{3}$	$\dfrac{4}{3}$

OX осінің бойына бөлік аралықтарды, ал OY осінің бойына $\dfrac{n_S}{h}$ мәндерін саламыз және осының арқасында тік төртбұрыштар тұрғызамыз. Тік төртбұрыштар жиынтығы ауданы таңдаманың көлеміне тең болатын ізделінді гистограмма (19-сурет).



19-сурет

3.5 Үлестірімнің параметрлерінің нүктелік бағалары

α - X кездейсоқ шамасының үлестірімінің белгісіз параметрі болсын. Онда $\alpha \approx \alpha^*$ жуықтауында қолданылған

$$\alpha^* = \alpha^*(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

статистикалық таңдама бойынша белгісіз параметрдің бағасы (нүктелік бағасы) деп аталады.

Бағалар классификациясы

$M\alpha^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha$ теңдігі орындалатындай сынақ нәтижелерінің артық немесе кем мәндерін бермейтін болсын. Онда осындай қасиеті бар α^* бағасы жылжытылмаған деп аталады. Керісінше жағдайда жылжыған деп аталады.

Егер $n \to \infty$ болғанда α^* бағасы α параметрінің айқын мәніне ұмтылатын болса,

$$\alpha^* = \alpha^*(x_1, x_2, ..., x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha,$$

онда α^* бағасы келісті бағасы деп аталады.

Келістілік дегеніміз көлемнің артуына қарағанда бағаның сапасының көлемі өсетін болуы. Егер α_1^* және α_2^* бағалары $M(\alpha_1^* - \alpha)^2 < M(\alpha_2^* - \alpha)^2$ теңсіздігін қанағаттандыратын болса, онда α_1^* бағасы α_2^* бағасына қарағанда эффективті деп аталады. Егер α^* бағасы басқаларға қарағанда тым эффективті болса, онда эффективті баға ретінде соны алуға болады.

Бағаларды алу әдістері

1. Моменттер әдісі. X - бір өлшемді белгісіз α параметрінен тәуелді $f(x,\alpha)$ үлестірім тығыздығы бар үзіліссіз кездейсоқ шама болсын. Онда $M(X)$ математикалық күтімі α параметрінің функциясы болады:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\alpha)dx=\mu_1(\alpha).$$

Таңдамалық орташа $M(X)$ мәніне жуық мәнді $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ қабылдайды. Бұл α белгісіз параметрін анықтайтын теңдеуді жазуға мүмкіндік береді:

$$\mu_1(\alpha)=\bar{x}.$$

Моменттер әдісі осы түрде дискретті кездейсоқ шамаларға да қолданылады.

2. Максималды шындыққа ұқсас әдіс. X дискретті кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы

$$P(X=a_i)=p_i(\alpha),\ i=1,2,...,k,$$

мұндағы a_i - X кездейсоқ шамасының мүмкін мәндері; $p_i(\alpha)$ - α белгісіз параметрінен тәуелді сәйкес ықтималдықтар және кез-келген α-ның мәнінде $\sum_{i=1}^{k}p_i(\alpha)=1$ теңдігін қанағаттандырады. X кездейсоқ шамасының a_i мәндерінің жиыны тек ақырлы ғана емес, сонымен саналымды да болуы мүмкін.

Егер бақылауға алынған таңдамалы мәндердің ішінде $(x_1,x_2,...,x_n)$ сан n_i $(i=1,2,...,k)$ рет кездесетін болса, онда ықтималдық үшін $L(x_1,x_2,...,x_n;\alpha)$ өрнектің түрі мынандай болады: $L(x_1,x_2,...,x_n;\alpha)=p_1^{n_1}(\alpha)p_2^{n_2}(\alpha)...p_k^{n_k}(\alpha)$.

Бұл функция α параметрінің шындыққа ұқсас функциясы деп аталады, ал α^* мәні $L(x_1,x_2,...,x_n;\alpha)$ функциясының максимум қабылдайтын мәні, α белгісіз параметрінің максималды шындыққа ұқсас бағасы.

α белгісіз параметрінің $f(x,\alpha)$ үлестірім тығыздығы бар X үзіліссіз кездейсоқ шамасы үшін максималды шындыққа ұқсас әдісі өз күшінде болады. Өзгешелігі шындыққа ұқсас $L(x_1,x_2,...,x_n;\alpha)=p(x_1,\alpha)\cdot p(x_2,\alpha)\cdot...\cdot p(x_n,\alpha)$ функциясы берілген таңдаманың ықтималдығы арқылы емес, ал $x_1,x_2,...,x_a$ шамалары мен α параметрінен тәуелді үлестірім тығыздығымен өрнектеледі. α таңдап алынған $x_1,x_2,...,x_n$ мәндерінің аргументтің ролін атқарады.

Кездейсоқ шаманың сандық мінездемелерін жуықтап есептейтін формулаларға тоқталайық. Математикалық күтімді жуықтап есептейтін формуланы жоғарыда қарастырдық. $\sigma^2=D(X)$ дисперсия үшін жуықтап есептеу формуласы:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \bar{x}_k\right)^2 .$$

S^2 саны эмпирикалық (таңдамалық) дисперсия деп аталады.

Егер $M(X) \approx \bar{x}$ екені нақты көрініп тұрса, онда $\sigma^2 \approx S^2$ теңдігінде $\frac{1}{n}$ көбейткішінің орнына неге $\frac{1}{n-1}$ көбейткіші тұрғаны таңқалдырады. Бұл жуықтау теңдіктері қарастырылып отырған кездейсоқ шаманың $M(X)$ және $\sigma^2 = D(X)$ параметрлерінің нүктелік бағалары деп аталады. Кездейсоқ шаманың тәжірибеде бақыланған x_n мәндерінің өзі кездейсоқ. Бұл кездейсоқ шамалардың да қабылдайтын мәндері осы X-тің қабылдайтын мәндерімен бірдей және осы X сияқты үлестірілген. Сондықтан да, $M(X) = M(x_k)$ және $D(X) = D(x_k) = \sigma^2$ теңдігі кез-келген k үшін орынды. Зерттеулердің нәтижесінде алынған мәндерді кездейсоқ шамалар ретінде қарастыру нүктелік бағаларға қойылатын талапты тұжырымдауға мүмкіндік береді. Параметрдің нүктелік бағалары мынадай үш қасиетке ие: орнықтылық, келістілік және эффективтілік.

3.6 Сенімділік интервалдары

Нүктелік бағалардан басқа сенімділік интервалдары да қолданылады: $\alpha^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ бір нүкте емес, ал $P(\underline{\alpha} < \alpha < \overline{\alpha}) = \gamma$ берілген ықтималдықпен α параметрінің ақиқат мәні сәйкес келетін $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$ аралығы қарастырылады.

$0 < \gamma < 1$ аралығындағы γ саны сенімділік ықтималдығы деп аталады және алынған бағаның үміттілігін көрсетеді, γ саны 1-ге жуық болса, соғұрлым баға үмітті болады, (көп жағдайда $\gamma = 0{,}9;\ 0{,}95$ немесе 0,99 таңдайды).

$\underline{\alpha}$ және $\overline{\alpha}$ шамалары сенімділік шекаралары деп аталады. Олар таңдалған мәндердің $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x_1, x_2, ... x_n)$ функциялары, сондықтан кездейсоқ шамалар болады.

$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x_1, x_2, ... x_n)$ кездейсоқ шекаралары бар $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$ интервалы $P(\underline{\alpha} < \alpha < \overline{\alpha}) = \gamma$ теңсіздігін қанағаттандыратын болса, онда α белгісіз параметрінің сенімділік интервалы деп аталады.

Сенімділік интервалдарының мысалдары

1. a математикалық күтімі үшін σ^2 белгілі дисперсия жағдайында қалыпты кездейсоқ шаманың сенімділік интервалы түрі:

$$\bar{x} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

мұндағы $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, ал t шамасы $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ -ге сәйкес келетін Лаплас функциясының аргументінің мәні (2-қосымша, 2-кесте).

2. a математикалық күтімі үшін σ^2 белгісіз дисперсия жағдайында қалыпты кездейсоқ шаманың сенімділік интервалы түрі:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}},$$

мұндағы $\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$ формуласымен есептеледі, t_γ шамасы берілген γ сенімділік ықтималдығы және n таңдама көлемі бойынша кесте көмегімен анықталады (2-қосымша, 5-кесте).

3. σ^2 дисперсия жағдайында қалыпты кездейсоқ шаманың сенімділік интервалы түрі:

$$\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(1)}},$$

мұндағы n - таңдама көлемі, σ^*- жоғарыда көрсетілген формула бойынша анықталған σ шамасының бағасы, $\chi^2_{(1)}$ және $\chi^2_{(2)}$ дегеніміз -

$$\int_0^{\chi^2_{(1)}} f_{n-1}(x)dx = \frac{1-\gamma}{2}, \quad \int_{\chi^2_{(2)}}^{+\infty} f_{n-1}(x)dx = \frac{1-\gamma}{2},$$

теңдеулерінің түбірлері, ал интеграл астындағы $f_{n-1}(x)$ функциясы $n-1$ еркіндік дәрежелі хи-квадраттың үлестірім тығыздығын береді. Бұл теңдеулер берілген γ сенімділік ықтималдығымен кесте көмегімен шешіледі (2-қосымша, 3-кесте). $\chi^2_{(1)}$ анықтағанда $v = n-1$ және $\alpha = \frac{1+\gamma}{2}$ арқылы кестені, ал $\chi^2_{(2)} - v = n-1$; анықтағанда $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$ арқылы берілген кестені қолданамыз.

4. n - тәуелсіз сынақтар саны, m - A оқиғасының орындалу саны, p - әрбір сынақта A оқиғасының орындалу ықтималдығы. n жеткілікті түрде үлкен, ал p ықтималдығы не нөлге, не бірге де жуық емес жағдайында, Лапластың асимптоталық формуласын қолдануға болады. p үшін сенімділік интервалының түрі:

$$\frac{m}{n+t^2} < p < \frac{m+t^2}{n+t^2},$$

ал t шамасы $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ -ге сәйкес келетін Лаплас функциясының аргументінің мәні (2-қосымша, 2-кесте).

$m=0$ жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда төменгі сенімділік шекарасы нөлге тең, ал жоғарғы шекарасы $1-\sqrt[n]{1-\gamma}$ тең. Осылайша, $m=n$ болса, онда төменгі және жоғарғы сенімділік шекаралары сәйкес $\sqrt[n]{1-\gamma}$ және бірге тең.

3.7 Болжамдарды статистикалық тексеру

3.7.1 Негізгі анықтамалар

Статистикалық зерттеулердің әртүрлі сатыларында алдын-ала жасалынған қандай да бір тұжырымдарды (болжамдарды) табиғатқа немесе қарастырылып отырған стохастикалық схеманың белгісіз параметрлер шамасына қатысты эксперименттік тексерулердің қажеттілігі туындайды. Мысалы, алдын-ала тұжырым айтылады: «Бас жинақ А заңы бойынша үлестірілген» немесе «үлестірімнің белгісіз параметрі θ анықталған θ_0 мәніне тең». Бірінші болжамда алдын-ала болжанған үлестірімнің түрі туралы болжам айтылса, екіншісінде – бір белгілі үлестірімнің параметрінің шамасы туралы болжам айтылған. Басқа да әртүрлі болжамдардың түрлері болады: екі немесе бірнеше үлестірім параметрлерінің теңдігі, таңдаманың тәуелсіздігі және т.б.

Анықтама. Статистикалық болжам деп кездейсоқ шаманың үлестірімінің түрі немесе үлестірім параметрлері туралы алдын-ала жасалатын болжамды айтамыз. Мысалы, статистикалық болжамдарға мынадай болжамдар мысал бола алады:

1) Пуассон заңы бойынша үлестірілген бас жинақ;
2) екі қалыпты жинақтың дисперсиялары өзара тең.

Ұсынылған болжаммен қатар оған қарама-қарсы болжам да қарастырылады. Егер ұсынылған болжам жоққа шығарылса, онда оған қарама-қарсы болжам орындалады.

Анықтама. Нөлдік болжам деп ұсынылған H_0 болжамын атайды.

Анықтама. Альтернативті болжам деп нөлдік болжамға қарама-қарсы болжамды айтамыз.

Мысалы, нөлдік болжам «қалыпты үлестірімнің математикалық күтімі 10-ға тең» деген болжам болса, онда оған альтернативті болжам «қалыпты үлестірімнің математикалық күтімі 10-ға тең емес» деген болжам. Қысқаша былай жазамыз: $H_0: a=10$, $H_1: a\neq 10$.

Анықтама. Жай болжам деп бір ғана сөйлемнен тұратын болжамды айтамыз.

Анықтама. Күрделі болжам деп шектеулі немесе шектеусіз жай болжамдардан тұратын болжамды айтамыз.

Ұсынылған болжам дұрыс та, бұрыс та болуы да мүмкін, сондықтан да тексеру қажет. Егер тексеру статистикалық әдістермен жүргізілсе, онда оны статистикалық деп атайды. Болжамдарды тексеру қорытындысында екі жағдайда дұрыс емес шешім қабылдануы мүмкін.

Анықтама. Бірінші текті қате деп – дұрыс болжамның жоққа шығарылуын айтамыз.

Анықтама. Екінші текті қате деп – бұрыс болжамның қабылдануын айтамыз.

Бірінші текті қате жіберу ықтималдығын маңыздылық деңгейі деп атаймыз және α деп белгілейміз. α маңыздылық деңгейі көбінде 0,05 немесе 0,01 мәндерін қабылдайды. Мысалы, $\alpha = 0{,}05$ дегеніміз барлығы 100 жағдайдың бесеуінде бірінші текті қате жіберу қаупі бар дегенді білдіреді.

Анықтама. Статистикалық критерий деп болжамды тексеру үшін қолданылатын кездейсоқ шаманы айтамыз.

Егер ол қалыпты үлестірілген болса, ол шаманы U немесе Z арқылы белгілейміз; ал егер Фишер заңы бойынша үлестірілсе - F арқылы; Стьюдент заңы бойынша үлестірілсе - T арқылы; «хи квадрат» заңы бойынша үлестірілсе χ^2 арқылы белгілейміз және т.с.с. Егер нақты үлестірімнің түрі туралы айтылмаса, онда жалпылық мақсатында ол шаманы K арқылы белгілейміз.

Анықтама. Бақылау мәні $K_{бақ}$ деп – таңдама бойынша есептелінетін критерийдің мәнін айтамыз.

3.7.2 Кризистік облыс. Болжамды қабылдау облысы. Кризистік нүктелер.

Анықталған критерий таңдалынып алынғаннан кейін оның барлық мүмкін мәндер жиынын екі қиылыспайтын ішкі жиындарға бөлеміз: оның біреуінің құрамында нөлдік болжам жоққа шығарылатын критерийдің мәні бар, ал екіншісінде - нөлдік болжам қабылданатын критерийдің мәні бар.

Анықтама. Кризистік облыс деп - нөлдік болжам жоққа шығаратын критерийдің мәндерінің жиынтығын айтамыз.

Анықтама. Болжамды қабылдау облысы деп - нөлдік болжамды қабылдайтын критерийдің мәндерінің жиынтығын айтамыз.

Статистикалық болжамдарды тексерудің негізгі принциптерін былайша тұжырымдауға болады: егер критерийдің қабылдайтын мәні кризистік облыста жататын болса – болжам жоққа шығарылады, егер критерийдің қабылдайтын мәні болжамды қабылдау облысында жатса – болжам қабылданады.

K критерийі – бірөлшемді шама болғандықтан, оның барлық мүмкін мәндері қандай да бір аралықта жатады. Сондықтан да, кризистік облыс пен болжамды қабылдау облысы аралық болып саналады, ендеше, оларды бөліп тұратын нүктелер бар болады.

Анықтама. Кризистік облысты болжамды қабылдау облысынан бөліп тұратын нүктелерді *кризистік нүктелер* деп атаймыз.

Кризистік облыстар біржақты (оң жақты және сол жақты) және екіжақты кризистік облыстар болып бөлінеді.

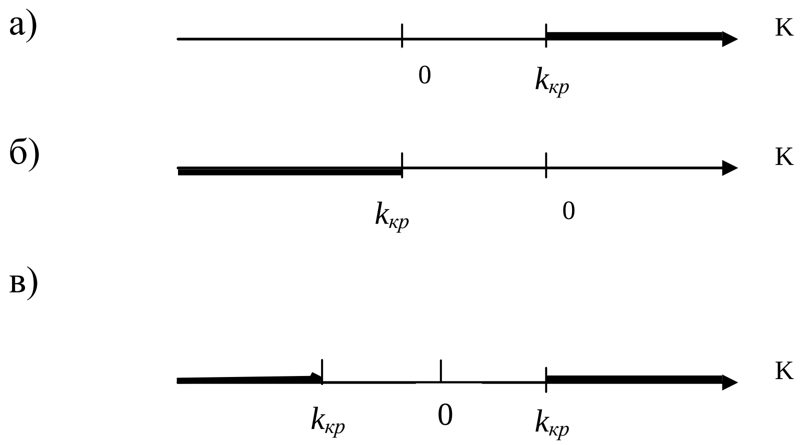
Анықтама. Оң жақты кризистік облыс деп $K > k_{кр}$ теңсіздігімен анықталатын облысты айтамыз, мұндағы $k_{кр}$ -оң сан (20а-сурет).

Анықтама. Сол жақты кризистік облыс деп $K < k_{кр}$ теңсіздігімен анықталатын облысты айтамыз, мұндағы $k_{кр}$ -теріс сан (20б-сурет).

Анықтама. Бір жақты кризистік облыс деп оң жақты және сол жақты кризистік облысты айтамыз.

Анықтама. Екі жақты кризистік облыс деп $K < k_1,\ K > k_2$, мұндағы $k_2 > k_1$, теңсіздіктерімен анықталатын облысты айтамыз.

Дербес жағдайда, егер кризистік нүкте нөлге қарағанда симметриялы болса, екі жақты кризистік облыс $|K| > k_{кр}$ теңсіздігімен анықталады(20в-сурет).



20-сурет

3.7.3 Оң жақты кризистік облысты іздеу

Анықтылық үшін $K > k_{кр}$, мұндағы $k_{кр} > 0$, теңсіздігімен анықталатын оң жақ кризистік облысты қарастырамыз. Бұдан оң жақ кризистік облысты табу үшін кризистік нүктені табу жеткілікті екені көрініп тұр. Оны табу үшін маңыздылық деңгейі α беріледі. Одан кейін қойылған талаптарды ескере отырып, нөлдік болжам дұрыс болу шартынан K критерийі $k_{кр}$-ден үлкен мән қабылдау ықтималдығы берілген маңыздылық деңгейіне $P(K > k_{кр}) = \alpha$ тең екенін ескеріп, $k_{кр}$ кризистік нүктесін іздейміз. Осы талапты қанағаттандыратын әрбір критерий үшін кризистік нүктені табатын дайын кесте бар.

Егер кризистік нүкте табылса, берілген таңдама бойынша критерийдің мәнін есептейміз және егер $K_{бақ} > k_{кр}$ болса, онда нөлдік болжамды жоққа шығарады;ал егер $K_{бақ} < k_{кр}$ болса, онда нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ.

Ескерту. Егер нөлдік болжам қабылданса, бұл әлі оның дәлелденгенін көрсетпейді. Өйткені, оның ақиқаттығын дәлелдейтін бір ғана таңдама нөлдік болжамды әлі дәлелдемейді. Сондықтан, «берілген таңдама нөлдік болжаммен үйлеседі» деп айтқан дұрыс болар еді. Тәжірибеде болжамның қабылдануы нақты болуы үшін оны басқа әдістермен тексереді немесе таңдаманың көлемін ұлғайтады.

Қандай да бір тұжырымды жоққа шығару үшін оған қарама-қарсы бір мысал кетіру арқылы болжамды жоққа шығаруды тиянақтырақ жүзеге асыруға болады. Сондықтан, егер критерийдің мәні кризистік облыста жататын болса, онда бұл оны жоққа шығаруға мүмкіндік береді.

3.7.4 Сол жақты және екі жақты кризистік облысты іздеу

Сол жақты және екі жақты кризистік облысты іздеу (оң жақты кризистік облысты іздеу сияқты) сәйкес кризистік нүктені табуды қажет етеді.

Сол жақты кризистік облыс $K < k_{кр}$ $(k_{кр} < 0)$ теңсіздігімен анықталады.

Қойылған талаптарды ескере отырып, нөлдік болжам дұрыс болу шартынан K критерийі $k_{кр}$-ден кіші мән қабылдау ықтималдығы берілген маңыздылық деңгейіне $P(K < k_{кр}) = \alpha$ тең екенін ескеріп, $k_{кр}$ кризистік нүктесін табамыз.

Екі жақты кризистік облыс $K < k_1, K > k_2$ теңсіздігімен анықталады. Қойылған талаптарды ескере отырып, нөлдік болжам дұрыс болу шартынан K критерийі k_1-ден кіші k_2-ден үлкен мән қабылдау ықтималдықтарының қосындысы берілген маңыздылық деңгейіне $P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha$ тең екенін ескеріп, $k_{кр}$ кризистік нүктесін табамыз.

Кризистік нүкте шектеусіз көп әдістермен таңдалынуы мүмкін. Егер үлестірім критерийі нөлге қарағанда симметриялы болса және нөлге қатысты симметриялы $-k_{кр}$ және $k_{кр}$ $(k_{кр} > 0)$ нүктелерін таңдап алуға негіз болса (мысалы, қуатын үлкейту үшін), онда $P(K < -k_{кр}) = P(K > k_{кр})$ болады.

$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha$ екенін ескеріп, $P(K > k_{кр}) = \dfrac{\alpha}{2}$ аламыз.

Бұл екі жақты кризистік облыста кризистік нүктені іздеу қатынасы болып табылады. Айтып кеткендей, кризистік нүкте дайын кесте бойынша табылады.

3.7.5 Статистикалық болжамдарды тексерудің логикалық схемасы

Шығарылатын есептердің өзіндік мінездемелері мен қойылатын талаптарына байланысты статистикалық критерийлер әртүрлі болып келеді. Бірақ оларды логикалық схеманың жалпылығы біріктіреді:

1) H_0 нөлдік болжамы мен H_1 альтернативтік болжамын ұсыну;

2) критерийдің α маңыздылық деңгейінің шамасы беріледі;

3) H_0 болжамын тексеру үшін критерийдің z статистикасы таңдалынып алынады;

4) H_0 болжамы ақиқат болатындай, z статистикасының таңдамалық үлестірімі анықталады;

5) альтернативті болжамға байланысты V_k кризистік облысы $z > z_{1-\alpha}$, $z < z_{\alpha}$ теңсіздіктерінің бірімен анықталады, немесе $z > z_{1-\alpha/2}$ және $z < z_{\alpha/2}$ теңсіздіктер жинағымен анықталады;

6) бақылаудың таңдамасын алады және критерийдің статистикасының z_b таңдамалық мәнін есептейді;

7) статистикалық шешім қабылданады:

егер $z_b \in V$ болса, онда бақылаудың нәтижелерімен келіспейтіндіктен H_0 болжамын жоққа шығарады;

егер $z_b \in V \setminus V_k$ болса, онда H_0 болжамын қабылдайды, яғни, H_0 болжамы бақылау нәтижелеріне қарама-қайшы келмейді деп есептеуге болады.

*Мысал 42***.** Жол көлігінің двигателінің құжатының берілгені бойынша оның 100 км-ге жағатын жанар-жағар майының мөлшері 10 л. Двигатель құрылымын өзгерту нәтижесінде жағылатын жанар-жағар май мөлшері азаяды. Тексеру үшін құрылымы өзгертілген кез келген 25 жол көлігіне сынақ жүргізіледі, әрі оның 100 км-ге жағатын жанар-жағар майының мөлшерінің таңдамалық орташасы сынақ нәтижесінде $x = 9{,}3$ л. Кететін жанар-жағар майдың таңдамасы қалыпты үлестірілген бас жинақтан m орташасымен және $\sigma^2 = 4\,л^2$ дисперсиясымен алынған. Маңыздылық критерийін қолданып, двигательдің құрылымын өзгерту жағылатын жанар-жағар майдың мөлшеріне әсер еткен жоқ деп тұжырымдалған болжамды тексер.

Шешуі. Қалыпты үлестірілген бас жинақтың m орташасы туралы болжам тексеріледі. Болжамды тексеруді мынадай ретпен жүргіземіз:

1) тексерілуге тиіс болжам $H_0 : m = 10$, альтернативті болжам $H_1 : m < 10$;

2) маңыздылық деңгейін таңдап аламыз: $\alpha = 0{,}05$;

3) критерийдің статистикасы ретінде математикалық күтімнің бағасы – таңдамалық орташа $\overline{x}$-ты қолданамыз;

4) Таңдама қалыпты үлестірілген бас жинақтан алынғандықтан, таңдамалық орташаның мынадай дисперсиямен берілген қалыпты үлестірімі бар: $\dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{4}{25}$.

H_0 болжамы дұрыс деген шарт орындалса, осы үлестірімнің математикалық күтімі 10-ға тең. Критерийдің қалыпқа келтірілген статистикасының:

$$U = \frac{\overline{x} - 10}{\sqrt{4/25}}$$

қалыпты үлестірімі бар $N(0,1)$;

5) Альтернативтік болжам $H_1 : m < 10$ жағылатын жанар-жағар май мөлшері азаяды деп жору, ендеше біржақты критерий қолдану керек. Кризистік облыс $U < u_{\alpha}$ теңсіздігімен анықталады. Кестені (қалыпты үлестірімнің квантилінің) қолданып, $u_{0,05} = -u_{0,95} = -1{,}645$ екенін табамыз;

6) Критерийдің қалыпқа келтірілген статистикасының таңдамалық мәні мынаған тең:

$$U_\beta = \frac{9{,}3 - 10}{\sqrt{4/25}} = -1{,}75;$$

7) Статистикалық шешім: статистиканың таңдамалық мәні кризистік облыста жатқандықтан, H_0 болжамы жоққа шығарылады, яғни, двигательдің құрылымын өзгерту жағылатын жанар-жағар май мөлшерін азайтты деп есептеуге болады.

Берілген x статистикасының кризистік облысының x_k шекарасын мына теңдіктен табуға болады:

$$\frac{\overline{x_k} - 10}{\sqrt{4/25}} = -1{,}645.$$

Бұдан $x_k = 9{,}312$, яғни, x статистикасының кризистік облысы $x < 9{,}342$ теңсіздігімен анықталады.

3.7.6 χ^2 келісімдік критерийі

Анықтама. Кездейсоқ шаманың заңының үлестірімі туралы болжамды тексеру үшін қолданылатын критерийлерді *келісімдік критерийлері* деп атаймыз.

Негізгі болжам H_0: X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясы мынадай түрде: $F(x)$.

Сандық өсті мынадай аралықтарға бөлеміз:

$(-\infty = a_0, a_1), [a_1, a_2], \ldots, [a_{r-1}, a_r = +\infty)$, мұндағы $a_1 < a_2 < \ldots < a_{r-1}$.

H_0 болжамы: i-ші разрядқа $P_i = F(a_i) - F(a_{i1})$ ықтималдығы сәйкес келеді.

X кездейсоқ шамасының берілген $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мәндерінің ішінен i-шы разрядқа m_i кездейсоқ саны сәйкес келеді $\left(\sum_{i=1}^{r} m_i = n\right)$.

Онда $\frac{m_i}{n}$ - таңдамалық мәннің i-ші интервалға түсу жиілігі. $\frac{m_i}{n}$ жиілігінің p_i санына жақындығы H_0 болжамының пайдасына шешіледі, ал едәуір айырмашылығы болса, онда H_0 болжамы жоққа шығарылады.

Кездейсоқ шама

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

H_0 болжамының сынақтың берілгендерімен сәйкес келетіндігін көрсетеді.

Критерийдің бақыланған $\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$ формуласымен есептелінеді, ал кризистік жиын $S = (\chi_\alpha^2, +\infty)$ түрінде таңдап алынады, мұндағы χ_α^2 мәні дайын кесте көмегімен табылады, $\gamma = r - 1 - t$ және маңыздылық деңгейі α

белгілі болған жағдайларда, t дегеніміз - $F = F(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t)$ функциясының параметрлерінің саны. Егер $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ теңсіздігі ақиқат болса, онда H_0 болжамы α маңыздылық деңгейінде жоққа шығарылады. Кері жағдайда, H_0 болжамы сынақтың берілгендеріне қарама-қайшы болмайды.

3.7.7 Қалыпты бас жинақтың екі дисперсиясын салыстыру. Фишер критерийі.

Дисперсияны салыстыру есебі құрылғының, аспаптардың, өлшеу әдістерінің өзінің дәлдігін салыстыруды талап етуден туындайды. өлшеудің нәтижесінің ең аз шашырауын (дисперсиясын) қамтамасыз ететін құрылғы, аспап, әдіс нақтырақ болып табылады.

X және $У$ бас жинақтары қалыпты үлестірілген болсын. Осы жинақтардан алынған көлемдері сәйкесінше n_1, n_2 болатын тәуелсіз таңдамалар бойынша түзетілген таңдамалық дисперсия табылған. Түзетілген дисперсия бойынша берілген маңыздылық деңгейі α үшін қарастырылып отырған жинақтардың бас дисперсиялары өзара тең деген, $H_0 : D(X) = D(Y)$, нөлдік болжамды тексеру қажет.

Егер нөлдік болжам дұрыс болса, онда түзетілген дисперсиялар арасындағы айырмашылық болмашы ғана және ол кездейсоқ себептермен, дербес жағдайда, таңдама объектісінің кездейсоқ алынуымен түсіндіріледі. Мысалы, егер екі құрылғымен жүргізілген өлшемдер нәтижесінің таңдамалық дисперсияларының түзетілген дисперсия айырмашылықтары болмашы ғана болса, онда құрылғылардың дәлдіктері бірдей деген сөз.

Егер нөлдік болжам жоққа шығарылса, онда түзетілген дисперсиялар арасындағы айырмашылық біршама және ол кездейсоқ себептермен түсіндірілмейді, бас дисперсиялардың өздерінің әртүрлі болу салдары болып табылады. Мысалы, егер екі құрылғымен жүргізілген өлшемдер нәтижесінің айырмашылықтары біршама болса, онда құрылғылардың дәлдіктері әртүрлі деген сөз. Бас дисперсиялардың теңдігі жөніндегі нөлдік болжамды тексеру критерийі ретінде үлкен түзетілген дисперсияның кішіге қатынасын, яғни, $F = \dfrac{S_б^2}{S_м^2}$ шамасын аламыз. Бұл шама кездейсоқ, сондықтан да әртүрлі сынақтарда дисперсиялары әртүрлі, алдын-ала белгісіз мәндер қабылдайды және Фишер заңы бойынша үлестіріледі.

Бұл таңдама бойынша болжамды тексеру үшін осы критерийдің құрамындағы шамалардың дербес мәндерін есептейміз және осылайша критерийдің мәнін аламыз.

α маңыздылық деңгейі $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, мұндағы $\sigma_1^2 = D(X)$, $\sigma_2^2 = D(Y)$ болжамын тексеру талап етілсін, альтернативті болжам $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Әдетте альтернативті болжамдар қолданылмайды. Егер нөлдік болжам дұрыс болса, онда критерий еркіндік дәрежесі $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ болатын Фишердің F-үлестірімі болады. Кризистік облыс оң жақты болады және $P(F > f_\alpha) = \alpha$ шарты бойынша анықталады.

f_α мәні үш шамаға тәуелді: α маңыздылық деңгейіне, k_1, k_2 еркіндік дәрежесіне және дайын кесте бойынша табылады (2-қосымша, 5-кесте).

3.7.8 Қалыпты үлестірімнің дисперсиясы туралы болжам. Пирсонның χ^2 үлестірім заңы

Бас жинақ белгісіз дисперсиямен қалыпты үлестірілсін. α маңыздылық деңгейі бойынша $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ болжамын тексеру қажет болсын. Статистика ретінде

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

критерийін қолданамыз. Егер H_0 болжамы дұрыс болса, онда χ^2 кездейсоқ шамасы Пирсонның еркіндік дәрежесі $n-1$ болатын χ^2 үлестірімімен үлестірілген, мұндағы n-таңдаманың көлемі.

Кризистік облыс альтернативті H_1 болжамына тәуелді χ^2 үлестірім кестесі бойынша анықталады.

Егер альтернативті болжам $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ түрінде болса, онда $P(\chi^2 < \chi_\alpha) = \alpha$ теңсіздігін қанағаттандыратын сол жақ кризистік облысты қолданамыз.

χ^2 үлестірім кестесі қарама-қарсы шартқа сәйкес құрылған. Ендеше, χ_α мәнін кестеден табу үшін $P(\chi^2 > \chi_\alpha) = 1-\alpha$ шартын қолданамыз.

$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ альтернативті болжам үшін $P(\chi^2 > \chi_\alpha) = \alpha$ теңсіздігін қанағаттандыратын оң жақ кризистік облысты қолданамыз және α дайын кестеден (2-қосымша, 3-кесте) табылады.

3.7.9 Екі орта мәннің теңдігі туралы болжам. Стьюдент критерийі

Қалыпты үлестірілген X және $У$ бас жинақтары берілсін, әрі олардың дисперсиялары белгісіз болсын. Осы екі бас жинақтан параметрлері сәйкесінше $n_1, \bar{x}_1, \bar{S}_1^2$ және $n_2, \bar{x}_2, \bar{S}_2^2$ болатын тәуелсіз таңдамалар жасалған.

Орта мәндерінің айырмасын $\delta = a_1 - a_2$ деп белгілейік, мұндағы a_1 дегеніміз – X үлестірімінің орта мәні, ал a_2 дегеніміз – $У$ үлестірімінің орта мәні. α маңыздылық деңгейін таңдап алғаннан кейін, $H_0 : \delta = \delta_0$ нөлдік болжамын, $H_1 : \delta < \delta_0$ альтернативті болжамын қарастырамыз. Критерий ретінде Стьюдент статистикасын аламыз:

$$T = \frac{x_1 - x_2 - \delta_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Егер H_0 болжамы дұрыс болса, онда Т кездейсоқ шамасы еркіндік дәрежесі $n_1 + n_2 - 2$ болатын үлестіріммен үлестірілген. Әдетте $\delta_0 = 0$, яғни, бас жинақтың орта мәндерінің теңдігі туралы болжам тексеріледі. Кризистік облыс $H_1 : \delta < \delta_0$ альтернативті болжам бойынша дайын кестеден (2-қосымша, 4-кесте) есептеледі. Қарастырылған жағдайда, сол жақ кризистік облысты аламыз: $P(\delta < \delta_0) = \alpha$.

3.8 Функционалдық, статистикалық және корреляциялық байланыстар

Екі кездейсоқ шама бір-бірімен функционалдық байланыста немесе статистикалық байланыста болады, не олар бір-бірімен тәуелсіз болуы мүмкін. Екі кездейсоқ шама бір-бірімен функционалдық байланыста деп айтамыз, егер олардың біреуінің белгілі бір заң бойынша өзгеруі екіншісін де өзгертетін болса, ал олардың арасында басқа түрдегі тәуелділік бар болса, олар статистикалық байланыста деп айтамыз.

Анықтама. Шамалардың біреуінің өзгеруі екіншісінің үлестірімін өзгертетін болса, онда мұндай байланыс *статистикалық байланыс* деп аталады.

Анықтама. Егер шамалардың біреуінің өзгеруі екіншісінің орташа мәнін өзгертетін болса, онда бұл жағдайдағы статистикалық байланыс *корреляциялық байланыс* деп аталады.

Мысал 43. У дегеніміз – бидайдың түсімі болсын, ал Х - оған себілетін көңнің мөлшері. Аудандары бірдей жер бөліктеріне бірдей мөлшерде көң себілген, ал алынған түсімнің мөлшері әртүрлі, яғни, У Х-ке тәуелді функция емес. Бұл кездейсоқ факторлар (жауын-шашын, агротехника және т.б.) әсерінен деп түсіндіріледі. Жүргізілген тәжірибелер нәтижесінің көрсеткіші бойынша, орташа түсім себілетін көңнің мөлшеріне тәуелді. У пен Х-тің арасындағы байланыс корреляциялық байланыс.

Шартты орташалар

Әрбір X үшін бірнеше Y сәйкес келсін. Мысалы, X мәні: $x_1 = 2,$ ал Y мәні: $y_1 = 5,\ y_2 = 6,\ y_3 = 10$ болсын. Y шамасының қабылдануы мүмкін мәндерінің арифметикалық орташасы: $\bar{y}_2 = \dfrac{5+6+10}{3} = 7$ - шартты орташа.

Анықтама. $\bar{y}_x$ шартты орташа мәні деп X=x болғандағы Y шамасының қабылдануы мүмкін мәндерінің арифметикалық орташасын айтамыз.

Анықтама. Y-тің X бойынша корреляциялық байланысы деп шартты орташалардың функционалдық байланысын айтамыз

$\bar{y}_x$ шамасының x бойынша: $$\bar{y}_x = f(x). \qquad (8)$$

(8) теңдеуі Y –тің X-ке байланысты регрессия теңдеуі деп атаймыз, $f(x)$ функциясын Y –тің X-ке байланысты регрессиясы деп атаймыз, ал оның графигін Y –тің X-ке байланысты регрессия сызығы деп атаймыз.

X-тің Y-ке корреляциялық байланысы дәл осылай анықталады.

3.9 Корреляция теориясының негізгі есептері

Корреляция теориясының бірінші есебі – корреляциялық байланыстың формасын анықтау, яғни, регрессия функциясының түрін анықтау (сызықтық, квадраттық, көрсеткіштік және т.б.) Өте жиі кезігетіні – сызықтық. Егер екі тәуелділік те, x-тің y-ке байланысты және y-тің x-ке байланысты, сызықтық болса, онда корреляция – сызықтық, кері жағдайда, сызықтық емес.

Корреляция теориясының екінші есебі – корреляциялық байланыстың тығыздығын (күшін) бағалау. Y-тің X бойынша корреляциялық байланысының тығыздығы Y мәнінің $\bar{y}_x$ орташаның маңайында шама бойынша сейілуімен бағаланады. Үлкен сейілу Y-тің X бойынша байланысы әлсіз немесе мүлдем жоқ дегенді білдіреді. Ал аз сейілу күшті байланысты көрсетеді, ол мүмкін функционалдық байланыс та болуы мүмкін. X-тің Y-ке байланысы дәл осылай анықталады.

3.9.1 Регрессияның таңдамалық түзу сызық теңдеуінің параметрлерін топталмаған берілгендер бойынша іздеу

У пен Х-тің арасындағы корреляциялық байланыс сызықтық болсын, онда регрессияның сызығының теңдеуі түзу болады.

Бұл түзулердің теңдеулерін іздеу үшін n тәуелсіз сынақ жүргізілген және нәтижесінде n сандар жұбы алынған:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots,\ (x_n, y_n). \tag{9}$$

Оны бас жинақтан алынған кездейсоқ таңдама ретінде қарастырамыз. Онда осы берілгендер бойынша табылған шамалар мен теңдеулер таңдамалық деп аталады.

Қарапайым жағдайда, егер x мәніне y сәйкес келетін болса, онда ізделінді $\bar{y}_x = kx + b$ теңдеуін $Y = kx + b$ түрінде жазуға болады, мұндағы k – регрессия түзу сызығының бұрыштық коэффиценті және ол былай белгіленеді: $k = \rho_{yx}$, ал регрессия теңдеуі мынадай:

$$Y = \rho_{yx} x + b. \tag{10}$$

ρ_{yx} және b параметрлерін, (9) теңдеуі XOY жазықтығында (10) теңдеуіне бар мүмкіндігінше жақындайтындай етіп таңдап аламыз. $Y_i - y_i$, $\left(i = \overline{1, n}\right)$ айырмасын ауытқу деп атаймыз, мұндағы Y_i шамасы (10) теңдеуі бойынша есептелінеді, y_i - (9)-дегі сындық нүкте. ρ_{yx} және b параметрлерін ауытқулар квадраттарының қосындысы минимал болатындай етіп таңдап аламыз (яғни, ең кіші квадраттар әдісі). $F(\rho,b)=\sum_{1}^{n}(Y_i-y_i)^2$ функциясын құрамыз немесе $F(\rho,b)=\sum_{i=1}^{n}(\rho_{yx}x_i+b-y_i)^2$.

Минимумын табу үшін жүйе құрамыз:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}=2\sum_{1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)x_i=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}=2\sum_{1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)=0$$

және бұл жерден ρ және b-ға тәуелді екі теңдеуден тұратын сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз: $\left.\begin{array}{l}\left(\sum x^2\right)\rho+\left(\sum x\right)b=\sum xy\\ \left(\sum x\right)\rho+\sum nb=\sum y\end{array}\right\}$. Бұны шешсек, онда:

$$\rho=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2};\ b=\frac{\sum x^2\sum y-\sum x\sum yx}{n\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}$$

және нәтижесінде ізделінді $y=\rho x+b$ теңдеуін аламыз.

Мысал 44. $У$ –тің X –ке байланысты таңдамалық түзу сызықты регрессиялық теңдеуін $n=5$ берілген бақылауы бойынша анықта.

х	1	1,5	3	4,5	5
у	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

Шешуі: есептеу кестесін құрамыз:

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	1	1,25	1	1,25
	1,5	1,4	2,25	2
	3	1,5	9	4,5
	4,5	1,75	20,25	4,875
	5	2,25	25	11,25
	$\sum x_i=15$	$\sum y_i=8$	$\sum x_i^2=5$	$\sum x_i y_i=2$

Белгілі формула бойынша:

$$\rho_{yx} = \frac{5 \cdot 26.975 - 15 \cdot 8{,}15}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} = 0{,}202$$

$$b = \frac{57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975}{62{,}5} = 1{,}024.$$

Ізделінді регрессия теңдеуі:

$$Y = 0{,}202x + 1{,}024.$$

Бұл теңдеу бойынша Y_i -дің мәндері y_i сындық мәндерімен қаншалықты сәйкес екенін көру үшін, $Y_i - y_i$ ауытқуын табамыз.

x_i	Y_i	y_i	$Y_i - y_i$
1	1,226	1,25	-0,024
1,5	1,327	1,4	-0,073
3,00	1,630	1,5	0,130
4,5	1,933	1,75	0,083
5	2,034	2,25	-0,216

Кестеден байқағанымыздай, барлық ауытқулар кіші шама емес. Бұл бақылау саны аз деп түсіндіріледі.

3.9.2 Корреляциялық кесте

Бақылаудың үлкен санында x –тің бір ғана мәні n_x рет кезігуі мүмкін, ал y-тің бір ғана мәні n_y рет кезігуі мүмкін, онда *(x,y)* сандар жұбының бір ғана мәні n_{xy} рет кезігеді. Сондықтан, бақылаудың берілгендері топталады, яғни, n_x, n_y, n_{xy} жиіліктері саналады. Барлық топталған берілгендер корреляциялық деп аталатын кесте түрінде жазылады.

Мысал 45.

X / У	10	20	30	40	n_y
0,4	5	-	7	14	26
0,6	-	2	6	4	12
0,8	3	19	-	-	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

3.10 Регрессияның таңдамалық түзу сызық теңдеуінің параметрлерін топталған берілгендер бойынша іздеу

Y –тің X –ке байланысты түзу сызықты регрессиялық теңдеуінің параметрлерін анықтау үшін мынадай теңдеулер жүйесі алынған:

$$\begin{cases} \left(\sum x^2\right)\rho_{yx} + \left(\sum x\right)b = \sum xy \\ \left(\sum x\right)\rho_{yx} + nb = \sum y \end{cases} \qquad (11)$$

ρ_{yx} - регрессия коэффиценті.

X мәні мен оған сәйкес Y-тің мәні бір рет бақыланды деп алынған.

Берілгендер саны үлкен (≈ 50 бақылау) болсын, олардың арасында қайталанатындары да бар және олар корреляциялық кесте түрінде топталған. (4) жүйесін корреляциялық кестенің берілгендерін көрсететіндей етіп жазамыз

$\sum x = n\bar{x}$ ($\bar{x} = \dfrac{\sum x^2}{n}$ -тың салдары), $\sum y = n\bar{y}$, $\sum x^2 = n\bar{x}^2$ ($\bar{x}^2 = \dfrac{\sum x^2}{n}$ -тан шығады)

$\sum xy = \sum n_{xy} x_y$ ((xy) мәні n_{xy} рет бақыланғаны ескерілген), онда (11) мына түрде болады:

$$\left.\begin{aligned} &\left(n\bar{x}^2\right)\rho_{xy} + \left(n\bar{x}\right)b = \sum n_x xy \\ &n\left(\bar{x}\right)\rho_{xy} + b = \sum \bar{y} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Жүйені шешіп, ρ_{yx} пен b-ны табуға болады және $\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b$ аламыз.

3.11 Корреляцияның таңдамалық коэффициенті

Бірақ та, жаңа шама – корреляция коэффицентін енгізу арқылы регрессия теңдеуін басқа түрде жазу ыңғайлы. $b = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x}$ шамасын регрессия теңдеуіне қойсақ:

$$\bar{y}_x = \rho_{yx}x + \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x}$$

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}\left(x - \bar{x}\right), \qquad (13)$$

(12)-ден $\bar{x}^2 - \left(\bar{x}\right)^2 = \sigma_x^2$ екенін ескере отырып, ρ_{yx}-ті табамыз:

$$\rho_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\left(\bar{x}^2 - \left(\bar{x}\right)^2\right]} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2},$$

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x^2},$$

r_B – корреляцияның таңдамалық коэффициенті :

$$\rho_{yx} = r_B \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$- Y-тің X-ке байланысты түзу сызықты регрессиялық теңдеуі.

Корреляцияның таңдамалық коэффицентінің қасиеті

Анықтама бойынша $r_B = \dfrac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x \sigma_y}$

Бұл шаманы енгізу мақсатымыз – сызықты корреляциялық байланыстың тығыздығын бағалау. Бұл сұраққа жауап оның қасиетінен шығады.

$$S_y = D_y(1 - r_b^2), \qquad S_x = D_x(1 - r_b^2),$$

мұндағы S_y- шартты орташа $\bar{y}_x$-ке сәйкес y-тің маңайындағы сындық мәндердің дисперсиясы. D_y- $\bar{y}$ жалпы орташасының маңайындағы бақылаулар дисперсиясы. S_x пен D_x дәл осылай анықталады.

1. r_B асолюттік шамасы бірден артпайды.

Дәлелдеуі: $S_y = D_y(1 - r_b^2) \geq 0$

$$1 - r_B^2 \geq 0, \quad -1 \leq r_B \leq 1 \text{ немесе } |r_B| \leq 1.$$

2. егер r_B=0 болса және регресияның таңдамалық сызықтары – түзу болса, онда X пен Y сызықты корреляция байланысымен байланысты емес.

Дәлелдеуі: егер r_B=0 болса, онда $\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$,

$$\bar{y}_x - \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y}_x = \bar{y} \ ,$$

$\bar{y}_x$- тұрақты мәнін сақтайды.

3. Егер $|r_B| = 1$ болса, онда $S_y = D_y(1 - r_b^2) = 0$.

4. $|r_B|$ өсуіне байланысты сызықты корреляциялық байланыс тығыз бола түседі және $|r_B| = 1$ болғанда, функционалдық байланысқа ауысады.

Осы қасиеттерден r_B коэффицентінің мағынасы шығады: корреляцияның таңдамалық коэффициенті таңдамадағы мөлшерлік белгілер арасындағы тығыздықты мінездейді, $|r_B| \to 1$ жақын болған сайын байланыс күштірек, ал $|r_B| \to 0$ жақын болған сайын байланыс әлсірейді.

Қалыпты үлестірілген бас жинақтың ($n \geq 50$) r_B корреляция коэффицентін бағалау үшін мына формуланы қолдана аламыз:

$$r_B - 3\frac{1-r_B}{\sqrt{4}} \leq r_2 \leq r_B + 3\frac{1+r_B^2}{\sqrt{4}}.$$

3.12 Есеп шығару үлгілері

Есеп 1. X кездейсоқ шамасының $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ Пуассон заңымен үлестірілгендігі белгілі. λ параметрі белгісіз болады. Нүктелік бағаларды алу әдісін қолданып, λ белгісіз параметрінің ($x_1, x_{2,\dots} x_8$) таңдама мәндерін ескергеннен кейін a^* бағасын табу керек:

1) моменттер әдісімен;
2) неғұрлым шындыққа ұқсас әдіспен.

Берілгені: $n = 30$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
14	12	9	8	15	7	11	8

Шешуі. Моменттер әдісі. Моменттер әдісі нүктелік бағалардың жылжытылмаған қасиетіне негізделген. $M(X)=M(\bar{x})$, өйткені, $M(\bar{x})=\bar{x}$, онда $M(X)=\bar{x}$ аламыз. Жеке-жеке математикалық күтім $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i(a) = \varphi(a)$мен таңдамалы орташаны $\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$ есептейік.

a белгісіз параметрін анықтау үшін теңдеуді аламыз: $\varphi(a)=\bar{x}$.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 14\frac{a^{14}}{14!}e^{-\lambda} + 12\frac{a^{12}}{12!}e^{-\lambda} + 9\frac{a^9}{9!}e^{-\lambda} + 8\frac{a^8}{8!}e^{-\lambda} + 15\frac{a^{15}}{15!}e^{-\lambda} + 7\frac{a^7}{7!}e^{-\lambda} + 11\frac{a^{11}}{11!}e^{-\lambda} + 8\frac{a^8}{8!}e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda}\cdot a\left(\frac{a^{13}}{13!}+\frac{a^{11}}{11!}+\frac{a^8}{8!}+\frac{a^7}{7!}+\frac{a^{14}}{14!}+\frac{a^6}{6!}+\frac{a^{10}}{10!}+\frac{a^7}{7!}\right)=$$

$$\left| e^{\lambda} = 1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\dots+\frac{\lambda^n}{n!}+\dots - \textit{Маклорен жіктеуі} \right| \cong e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

$M(X)\approx a$, $\bar{x}$ таңдамалы орташаны есептейік:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8}(14+12+9+8+15+7+11+8)=10{,}5,$$

бұдан, өйткені

$M(X)=\bar{x}$, => $\bar{x}=a^*$, => $a^*\approx 10{,}5$ -параметрдің нүктелік бағасын аламыз.

Жауабы: $a^* = 10{,}5$.

Максималды шындыққа ұқсас әдісі. Дискретті кездейсоқ шаманың шындыққа ұқсас функциясын құрайық. Егер $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ таңдамасында x_i саны n_i рет кездесетін болса, онда шындыққа ұқсас функцияның түрі:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = p_1^{n_1}(\alpha) \cdot p_2^{n_2}(\alpha) \cdot ... \cdot p_k^{n_k}(\alpha).$$

Функция максимумға ие болатын α^* мәні a белгісіз параметрінің максималдыққа шындыққа ұқсас бағасы деп аталады.

Қарастырып отырған жағдайдың шындыққа ұқсас функциясын құрайық:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\lambda^{14}}{14!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{12}}{12!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{9}}{9!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{8}}{8!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{15}}{15!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{7}}{7!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{11}}{11!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{8}}{8!} e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{1}{14! \cdot 12! \cdot 9! \cdot 8! \cdot 15! \cdot 7! \cdot 11! \cdot 8!} \cdot e^{-8\lambda} \cdot a^{84} = Ae^{-8\lambda} \cdot \lambda^{84} = L(\lambda)$$

$L(\lambda)$ функциясын экстремумға зерттейік. Экстремум болуының қажетті шарты бойынша: $L'(\lambda) = 0$.

$$L'(\lambda) = A\left(e^{-8\lambda} \cdot (-8) \cdot \lambda^{84} + e^{-8\lambda} \cdot 84 \cdot \lambda^{83}\right) = Ae^{-8\lambda} \cdot \lambda^{83}(-8\lambda + 84) = 0$$

$$-8\lambda + 84 = 0$$

$a^* = 10{,}5$ - кризистік нүкте.

Экстремум болуының жеткілікті шарты екінші туындысының кризистік нүктесіндегі таңбасына байланысты:

$$L''(\lambda) = A\left(e^{-8\lambda} \cdot (-8) \cdot \lambda^{83}(-8\lambda + 84) + e^{-8\lambda} \cdot 83 \cdot \lambda^{82} \cdot (-8\lambda + 84) + e^{-8\lambda} \cdot (-8) \cdot \lambda^{83}\right) =$$

$$= Ae^{-8\lambda} \cdot \lambda^{82}(-8\lambda \cdot (-8\lambda + 84) + 83(-8\lambda + 84) - 8\lambda) = Ae^{-8\lambda} \cdot \lambda^{82}(64\lambda^2 - 8\lambda \cdot 84 + (-8\lambda) \cdot 83 + 83 \cdot 84 - 8\lambda) =$$

$$= Ae^{-8\lambda} \cdot \lambda^{82}(64 \cdot (10{,}5)^2 - 672 \cdot 10{,}5 - 664 \cdot 10{,}5 + 6972 - 8 \cdot 10{,}5) = -84Ae^{-8\lambda} \cdot \lambda^{82} < 0,$$

$L''(\lambda) > 0$ болғандықтан, $x = \lambda$ нүктесінде $L(\lambda)$ функциясы максимумға ие болады. $\lambda = a^* = 10{,}5$ мәні $L(\lambda)$ функциясының максималды мәні болады.

Жауабы: $a^* = 10{,}5$.

Есеп 2. X кездейсоқ шамасының $P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$ биномдық заңмен үлестірілгендігі белгілі. *p* параметрі - белгісіз. Нүктелік бағалаудың әдістерін қолданып, *p* белгісіз параметрінің (x_1, $x_{2,...}$ x_8) таңдама мәндерін ескергеннен кейін *p** бағасын табу керек.

Берілгені: $n = 30$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
14	12	9	8	15	7	11	8

Шешуі. Моменттер әдісі. Моменттер әдісі нүктелік бағалардың жылжытылмаған қасиетіне негізделген. $M(X) = M(\bar{x})$, өйткені, $M(\bar{x}) = \bar{x}$, онда $M(X) = \bar{x}$ аламыз. Жеке-жеке математикалық күтім $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = \varphi$ мен таңдамалы орташаны $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ есептейік.

p белгісіз параметрін анықтау үшін теңдеуді аламыз: $\varphi(p) = \bar{x}$.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i = 14\cdot C_{30}^{14}\cdot p^{14}\cdot (1-p)^{30-14} + 12\cdot C_{30}^{12}\cdot p^{12}\cdot (1-p)^{30-12} + 9\cdot C_{30}^{9}\cdot p^{9}\cdot (1-p)^{30-9} +$$

$$+2\cdot 8\cdot C_{30}^{8}\cdot p^{8}\cdot (1-p)^{30-8} + 15\cdot C_{30}^{15}\cdot p^{15}\cdot (1-p)^{30-15} + 7\cdot C_{30}^{7}\cdot p^{7}\cdot (1-p)^{30-7} + 11\cdot C_{30}^{11}\cdot p^{11}\cdot (1-p)^{30-11} =$$

$$=14\cdot \frac{30!}{14!\cdot 16!}\cdot p^{14}\cdot (1-p)^{16} + 12\cdot \frac{30!}{12!\cdot 18!}\cdot p^{12}\cdot (1-p)^{18} + 9\cdot \frac{30!}{9!\cdot 21!}\cdot p^{9}\cdot (1-p)^{21}$$

$$+2\cdot 8\cdot \frac{30!}{8!\cdot 22!}\cdot p^{8}\cdot (1-p)^{22} + 15\cdot \frac{30!}{15!\cdot 15!}\cdot p^{15}\cdot (1-p)^{15} +$$

$$+7\cdot \frac{30!}{7!\cdot 23!}\cdot p^{7}\cdot (1-p)^{23} + 11\cdot \frac{30!}{11!\cdot 19!}\cdot p^{11}\cdot (1-p)^{19} =$$

$$=30p\left[\frac{29!}{13!\cdot 16!}\cdot p^{13}\cdot (1-p)^{16} + \frac{29!}{11!\cdot 18!}\cdot p^{11}\cdot (1-p)^{18} + \frac{29!}{8!\cdot 21!}\cdot p^{8}\cdot (1-p)^{21} + 2\cdot \frac{29!}{7!\cdot 22!}\cdot p^{7}\cdot (1-p)^{22} +\right.$$

$$\left.+\frac{29!}{14!\cdot 15!}\cdot p^{14}\cdot (1-p)^{15} + \frac{29!}{6!\cdot 23!}\cdot p^{6}\cdot (1-p)^{23} + \frac{29!}{10!\cdot 19!}\cdot p^{10}\cdot (1-p)^{19}\right] =$$

$$=30p\left[C_{29}^{13}\cdot p^{13}\cdot (1-p)^{16} + C_{29}^{11}\cdot p^{11}\cdot (1-p)^{18} + C_{29}^{8}\cdot p^{8}\cdot (1-p)^{21} + 2\cdot C_{29}^{7}\cdot p^{7}\cdot (1-p)^{22} +\right.$$

$$\left.+C_{29}^{14}\cdot p^{14}\cdot (1-p)^{15} + C_{29}^{6}\cdot p^{6}\cdot (1-p)^{23} + C_{29}^{10}\cdot p^{10}\cdot (1-p)^{19}\right] =$$

$$\left|\ (p+q)^{29} = p^{29} + C_{29}^{1}\cdot p^{28}\cdot q + C_{29}^{2}\cdot p^{28}\cdot q^{2} + \ldots + C_{29}^{28}\cdot p\cdot q^{28} + q^{29} = 1\right|$$

Биномдық формуланы қолданып, $M(X)=30p(p+1-p)^{29}=30p \Rightarrow M(X)\approx 30p$ аламыз. Енді $\bar{x}$ таңдамалы орташаны есептеуге көшеміз:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{8}(14+12+9+8+15+7+11+8)=10{,}5,$$

Бұдан $30p=10{,}5;\ p^*\approx 0{,}35$, өйткені, $M(X)=\bar{x}$, => $\bar{x}=p^*$, => $p^*\approx 0{,}35$ - параметрдің нүктелік бағасы.

Жауабы: $p^*=0{,}35$.

Максималды шындыққа ұқсас әдісі.

Дискретті кездейсоқ шаманың шындыққа ұқсас функциясын құрайық. Егер $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ таңдамасында x_i саны n_i рет кездесетін болса, онда шындыққа ұқсас функцияның түрі:

$$L(x_1,x_2,...,x_n)=p_1^{n_1}(\alpha)\cdot p_2^{n_2}(\alpha)\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k}(\alpha).$$

Функция максимумға ие болатын p мәні p белгісіз параметрінің максималдыққа шындыққа ұқсас бағасы деп аталады.

Қарастырып отырған жағдайдың шындыққа ұқсас функциясын құрайық:

$$L(x_1,x_2,...,x_8)=C_{30}^{14}\cdot p^{14}\cdot (1-p)^{30-14}\cdot C_{30}^{12}\cdot p^{12}\cdot (1-p)^{30-12}\cdot C_{30}^{9}\cdot p^{9}\cdot (1-p)^{30-9}\cdot \left(C_{30}^{8}\cdot p^{8}\cdot (1-p)^{30-8}\right)^{2}\cdot$$

$$\cdot C_{30}^{15}\cdot p^{15}\cdot (1-p)^{30-15}\cdot C_{30}^{7}\cdot p^{7}\cdot (1-p)^{30-7}\cdot C_{30}^{11}\cdot p^{11}\cdot (1-p)^{30-11} =$$

$$=C_{30}^{14}\cdot C_{30}^{12}\cdot C_{30}^{9}\cdot \left(C_{30}^{8}\right)^{2}\cdot C_{30}^{15}\cdot C_{30}^{7}\cdot C_{30}^{11}\cdot p^{\sum x_i}\cdot (1-p)^{n\cdot 8-\sum x_i} = A\cdot p^{84}\cdot (1-p)^{156} = L(p)$$

$L(p)$ функциясын экстремумға зерттейік. Экстремум болуының қажетті шарты бойынша: $L'(p)=0$

$$L'(p)=A\left(84\cdot p^{83}\cdot(1-p)^{156}-p^{84}\cdot 156\cdot(1-p)^{155}\right)=$$
$$A\cdot p^{83}\cdot(1-p)^{155}\cdot\left[84(1-p)-156p\right]=0$$
$$p\neq 0;\quad p\neq 1$$
$$84(1-p)-156p=0$$
$$84-84p-156p=0$$
$$240p=84$$

$p^*=\dfrac{84}{240}=0{,}35$ - кризистік нүкте.

Экстремум болуының жеткілікті шарты екінші туындысының кризистік нүктесіндегі таңбасына байланысты:

$$L''(p)=A\left[84\cdot 83\cdot p^{82}\cdot(1-p)^{156}-84\cdot p^{83}\cdot 156\cdot(1-p)^{155}-156\cdot 84\cdot p^{83}\cdot(1-p)^{155}+156\cdot 155\cdot p^{84}\cdot(1-p)^{154}\right]=$$
$$A\cdot p^{82}\cdot(1-p)^{154}\cdot\left[84\cdot 83(1-p)^2-2\cdot 84\cdot 156p(1-p)-156\cdot 155\cdot p^2\right]=$$

$$=A\cdot p^{82}\cdot(1-p)^{154}\cdot\left[6972(1-p)^2-26208p(1-p)-24180\cdot p^2\right]=$$
$$=A\cdot p^{82}\cdot(1-p)^{154}\cdot\left[6972-40152p-4944\cdot p^2\right]=0$$
$$L''(0{,}35)=A\cdot p^{82}\cdot(1-p)^{154}\cdot\left[6972-14053{,}2-605{,}64\right]=A\cdot p^{82}\cdot(1-p)^{154}\cdot(-7686)<0$$

$L''(p)<0$ болғандықтан, $x=p$ нүктесінде $L(p)$ функциясы максимумға ие болады. $p=p^*=0{,}35$ мәні $L(p)$ функциясының максималды мәні болады.

Жауабы: $p^*=0{,}35$.

Есеп 3. *X* кездейсоқ шамасының *a* белгісіз математикалық күтімі мен σ^2.белгілі дисперсиясы бар қалыпты үлестіруі берілген. $(x_1,x_2,....,x_n)$ таңдамасы бойынша $\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$ таңдамалық орташа есептелген. *P* сенімділік ықтималдығы берілсе, онда *a* белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалын табыңыз.

Берілгені: $a^*=120,\quad n=110, \sigma^2=144,\quad \gamma=0{,}94.$

Табу керек: *a* белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалы.

Шешуі. a белгісіз математикалық күтімі мен σ^2 белгілі дисперсиясы бар қалыпты үлестірілген кездейсоқ шамасының сенімділік интервалының түрі:

$\overline{x}$ - таңдамалық орташа және $\overline{x}=a^*$

$$\overline{x}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Лаплас функциясының кестесі (2-қосымша, 2-кесте) бойынша $\gamma=0{,}94$мәнінде $t=1{,}840$ тең.

δ дәлдігі төмендегі формуламен есептеледі:

$$\delta=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{12}{\sqrt{110}}\cdot 1{,}840=\frac{22{,}08}{\sqrt{110}}=2{,}103,$$

онда сенімділік интервалы

$$\overline{x}-2{,}103<a<\overline{x}+2{,}103$$
$$120-2{,}103<a<120+2{,}103$$
$$117{,}9<a<122{,}1.$$

Жауабы: a белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалы a параметрін 2,103 дәлдігімен және 0,94 үміттілігімен қамтиды.

Есеп 4. X кездейсоқ шамасының a белгісіз математикалық күтімі мен σ^2.белгілі дисперсиясы бар қалыпты үлестіруі берілген. $(x_1,x_2,....,x_n)$ таңдамасы бойынша $a = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$ және $(\sigma^2)^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a^*)^2$ бағалары есептелген. γ сенімділік ықтималдығы берілсе, онда a белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалын табыңыз.

Берілгені: $a^* = 1{,}7,\ n = 26,\ (\sigma^2)^* = 0{,}8,\quad \gamma = 0{,}9$.

Табу керек: a белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалы.

Шешуі. a белгісіз математикалық күтімі мен σ^2 белгілі дисперсиясы бар қалыпты үлестірілген кездейсоқ шамасының сенімділік интервалының түрі:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}},$$

$t_\gamma = 2{,}3$ және $a^* = \bar{x}$.

онда сенімділік интервалы

$$1{,}7 - 0{,}406 < a < 1{,}7 + 0{,}406$$

$$1{,}294 < a < 2{,}106.$$

Жауабы: a белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалы a параметрін 0,406 дәлдігімен және 0,9 үміттілігімен қамтиды.

Есеп 5. n сынақтың нәтижесінде қалыпты кездейсоқ шаманың дисперсиясы үшін жылжытылмаған бағасы алынған. γ сенімділік ықтималдығы берілсе, онда a белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалын табыңыз.

Берілгені: $n = 16,\ \sigma^{*2} = 64,\ \gamma = 0{,}98.$

Табу керек: a белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалы.

Шешуі. σ^2 белгілі дисперсиясы бар қалыпты үлестірілген кездейсоқ шамасының сенімділік интервалының түрі:

$$\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(2)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(1)}},$$

мұндағы n - таңдама көлемі; σ^*- $\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}$ формуласымен анықталған σ параметрінің бағасы. $\chi^2_{(2)}$ және $\chi^2_{(1)}$ - сәйкес $\int_0^{\chi^2_{(1)}} p_{n-1}(x)dx = \frac{1-\gamma}{2}$; $\int_{\chi^2_{(2)}}^{+\infty} p_{n-1}(x)dx = \frac{1-\gamma}{2}$ теңдеулерінің түбірлері. Интегралдардың астындағы функциялар $n-1$ бос дәрежелі χ^2 үлестру тығыздығын (Пирсон тығыздығы) береді. Берілген сенімділік ықтималдығы бойынша теңдеулер (2-қосымша, 3-кесте) көмегімен шешіледі.

$\chi_{(1)}{}^2$ анықтау үшін $\nu = n-1=15$ және $\alpha = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}98}{2} = 0{,}99$, онда кесте бойынша $\chi_{(1)}{}^2 = 5{,}23$ аламыз. $\chi_{(2)}{}^2$ анықтау үшін $\nu = n+1=17$ және $\alpha = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}98}{2} = 0{,}01$, онда кесте (2-қосымша, 3-кесте) бойынша $\chi_{(2)}{}^2 = 33{,}4$ аламыз.

Табылған шамаларды белгілі дисперсиясы бар қалыпты үлестірілген кездейсоқ шамасының сенімділік интервалының жоғарыдағы формуласына қойып,

$$\frac{(16-1)64}{33{,}4} \le \sigma^2 \le \frac{(16-1)64}{5{,}23}$$

$$28{,}74 \le \sigma^2 \le 183{,}5$$

теңсіздігін аламыз.

Жауабы: $28{,}74 \le \sigma^2 \le 183{,}5$ ізделінді сенімділік интервалы.

Есеп 6. Нысанаға n рет атыс жүргізгенде m рет оқтың тигені бақыланған. $p = 0{,}95$ сенімділік ықтималдығы берілсе, онда нысанаға тигізі ықтималдығының сенімділік интервалын табыңыз.

Берілгені: $n = 41$; $m = 24$; n -тәуелсіз сынақтар саны; m - оқиғаның орындалу саны.

Табу керек: p сенімділік ықтималдығы үшін сенімділік интервалын табыңыз.

Шешуі. Муавр – Лапластың асимптотикасын қолдансақ, онда γ сенімділік ықтималдығы үшін сенімділік интервалының түрі:

$$\frac{m}{n+t^2} < p < \frac{m+t^2}{n+t^2},$$

$t = 1{,}96$ шамасы $\gamma = 0{,}95$ сенімділік ықтималдығымен кесте (2-қосымша, 2-кесте) көмегімен анықталған. Жоғарыда көрсетілген теңсіздікке берілген шамаларды қойып,

$$\frac{24}{41+1{,}96^2} \le p \le \frac{24+1{,}96^2}{41+1{,}96^2},$$

$$0{,}535 \le p \le 0{,}62 .$$

теңсіздігін аламыз.

Жауабы: $0{,}535 \le p \le 0{,}62$ ізделінді сенімділік интервалы.

Есеп 7. n сынақтың нәтижесінде *А* оқиғасы бірде – бір рет орындалмады. *Р(А)* ықтималдығының жоғарғы сенімділік шекарасы p берілсе, жүргізілген n сынақтың санын табыңыз. Сенімділік ықтималдығы - $\gamma = 0{,}95$

Берілгені: p=0,032, $\gamma = 0{,}95$.

Табу керек: $n=?$

Шешуі. А оқиғасы бірде – бір рет орындалмаған жағдайда жоғарғы сенімділік шекарасы формуласымен анықталады:

$$p = \sqrt[n]{1-\gamma},$$

мұндағы γ- сенімділік ықтималдығы.

n – ге байланысты көрсеткішлік теңдеуді шешеміз:

$$0{,}032 = 1 - 0{,}05^{\frac{1}{n}} \Rightarrow 0.05^{\frac{1}{n}} = 0{,}968 \Rightarrow \frac{1}{n}\lg 0{,}05 = \lg 0{,}968 \Rightarrow n = \left[\frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}968}\right] = [92{,}04] = 92$$

.

n сынақтың санын көрсететіндіктен бүтін бөлігін аламыз.

Жауабы: n=92.

Есеп 8. Бақылау үшін 200 тармақ алынған. Тармақтарды жинау кезінде i операциядан кейінгі қалған тармақ саны m_i кесте бойынша берілген:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	41	62	45	22	16	8	4	2

Алынған нәтижелер Пуассон үлестірімімен, $P = \frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\lambda}$, сәйкес келе ме, мұндағы X дегеніміз - χ^2 критерийі бойынша α маңыздылық деңгейіндегі жүргізілген операциялардың кездейсоқ саны. Мұндағы: $\lambda = 1{,}85,\ \alpha = 0{,}05$.

Шешуі.

H_0 болжамы: X кездейсоқ шамасы – тармақтарды жинау кезінде жүргізілген операциялар саны Пуассон үлестірімімен берілген:

$$P = \frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\lambda}.$$

$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$, $i = 1,\ldots,8$ шамасын есептеу үшін кесте құрамыз:

№	i	m_i	$P = \frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\lambda}$	nP_i	$m_i - nP_i$	$(m_i - nP_i)^2$	$(m_i - nP_i)^2 / nP_i$
1	0	41	0,1572	31,4474	9,5526	91,2515	2,9017
2	1	62	0,2909	58,1778	3,8222	14,6096	0,2511
3	2	45	0,2691	53,8144	-8,8144	77,6940	1,4437
4	3	22	0,1659	33,1856	11,1856	125,1167	3,7702
5	4	16	0,0767	15,3483	0,6517	0,4247	0,0277
6	5	8	0,0284	5,6789	2,3211	5,3876	0,9487
7	6	4	0,0088	1,7510	2,2490	5,0581	2,8887
8	7	2	0,0023	0,4628	1,5372	2,3631	5,1065
							$\chi^2 = 17{,}3384$

$\gamma = \gamma - 1 - t = 8 - 1 - 1 = 6$, мұндағы $t = 1$, a параметрі Пуассон формуласында жалғыз.

α және γ ескеріп, кесте арқылы $\chi^2_\alpha = 12{,}59$ мәнін табамыз.

$S = (\chi^2_\alpha; \infty)$ кризистік жиынын құрамыз. Егер $\chi^2 \in S$, яғни, $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ қатынасы орындалатын болса, онда α мәнділік деңгейінде H_0 жорамалы терістеледі. Керісінше жағдайда тәжірибелік берілгендерге H_0 жорамалы терістелмейді. Біздің жағдайда: $\chi^2_\alpha = 17{,}3384$, а $S = (12{,}59; \infty)$, сондықтан $17{,}3384 \in S$.

Ендеше, H_0 жорамалы терістеледі.

Жауабы: Алынған нәтижелер Пуассон үлеструімен келіспейді.

Есеп 9. Көлемі $n = 20$ берілген таңдама бойынша $\overline{S}^2 = 1786{,}89$ таңдамалық дисперсиясы есептелген. Маңыздылық деңгейі $\alpha = 0{,}01$ берілген. $H_0 : \sigma^2 = 1876$ болжамын $H_1 : \sigma^2 > 1876$ болғанда статистиканың мәнін есептей отырып, тексер. Қорытынды жаса.

Шешуі. $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ статистикасын қолданамыз, мұндағы S^2- дисперсияның жылжымаған бағасы және ол $S^2 = \dfrac{n}{n-1}\overline{S}^2$ формуласымен есептелінеді, мұндағы $\overline{S}^2$ - дисперсияның жылжыған бағасы.

Берілген мәндерді χ^2 үлестірім кестесіне қойып, $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{20 \cdot 1786{,}89}{1876} \approx 19{,}05$ аламыз. Біздің жағдайымызда, кризистік облыс оңжақты, яғни, $P(\chi^2 > \chi_\alpha) = \alpha$. Кестеден (2-қосымша, 3-кесте) $\chi_\alpha = 36{,}19$ екенін аламыз. χ^2=19,05 критерийдің мәні (36,19; ∞) кризистік облыста жатпайды, ендеше $H_0 : \sigma^2 = 1876$ болжамын қабылдамауға негіз жоқ.

Жауабы: 19,05- нөлдік болжамды қабылдамауға негіз жоқ.

Есеп 10. Екі таңдамалық жинақтың таңдамалық орташалары мен дисперсиялары, таңдама көлемдері және маңыздылық деңгейі берілген:

$$\overline{x_1} = 478{,}87; \overline{S_1^2} = 3944{,}13; n_1 = 15; \overline{x_2} = 464{,}47; \overline{S_2^2} = 3452{,}8; n_2 = 15; \alpha = 0{,}001.$$

$H_0 : \delta = 0$ болжамын $H_1 : \delta < 0$ болғанда статистиканың мәнін есептей отырып, тексер, мұндағы δ - бас жинақтың математикалық үміттерінің айырмасы. Қорытынды жаса.

Шешуі. $T = \dfrac{478{,}87 - 464{,}47}{\sqrt{\dfrac{15(3944{,}13 + 3452{,}8)}{28} \cdot \dfrac{2}{15}}} \approx 0{,}63$ критерийін есептейміз.

Кесте бойынша $t_\gamma = -3{,}41$, $T < t_\gamma$.Сонымен, критерийдің мәні кризистік облыста жатпайды, ендеше, нөлдік болжамды жоққа шығаруға негіз жоқ.

Жауабы: 4- нулевая гипотеза отвергается

Есеп 11. Көлемдері $n_1 = 9$, $n_2 = 7$ таңдама бойынша $\alpha = 0{,}05$ маңыздылық деңгейімен түзетілген таңдамалық дисперсиялар табылған $S_1^2 = 20$ және $S_2^2 = 5$.

α маңыздылық деңгейінде $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ болжамын тексер, мұндағы $\sigma_1^2 = D(X)$, $\sigma_2^2 = D(Y)$, альтернативті болжам ретінде $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ болжамын ал.

Шешуі. Онда критерийдің бақыланған мәні $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{20}{5} = 4$ болады.

Кесте (2-қосымша, 3-кесте) бойынша $f_\alpha = 3{,}73$ табамыз. 4>3,73 болғандықтан, критерийдің мәні кризистік облыстың оң жағында жатады, сондықтан нөлдік болжамды жоққа шығарамыз.

3.13 Қайталауға арналған сұрақтар

1. Математикалық статистиканың негізгі есептері.
2. Таңдаманың статистикалық үлестірімі.
3. Үлестірімнің эмпирикалық функциясы.
4. Жиілік полигоны.
5. Жиілік гистограммасы.
6. Үлестірімнің нүктелік бағалары.
7. Бағалар қасиеттері.
8. Бағаларды алу әдістері.
9. Сенімділік ықтималдығы.
10. Сенімділік интервалдары.
11. Жорамалдардың статистикалық тексеруі.
12. Келісімділік критерийі.
13. Корреляция теориясының негізгі есептері.
14. Шартты орташа.
15. Регрессия теңдеуі.
16. Корреляциялық кесте.
17. Корреляцияның таңдамалық коэффицентінің қасиеті.

4 ӨЗ БЕТІМЕН ОРЫНДАЙТЫН ЕСЕПТЕУ ТАПСЫРМАЛАРЫ
(берілгендерді оқу құралының соңынан табасыз)

Есеп 1.

1.1. Үш құрылғы беріктілікке сынақтан өткізіледі. A_k оқиғасы – «k-ші құрылғы сыннан өтті» деген оқиғалар болсын ($k=1,2,3$). A_k және $\overline{A}_k$ оқиғаларының бірігуі және қиылысулары арқылы келесі оқиғаларды өрнекте: A - «тым болмағанда бір құрылғы сыннан өтті», B - «сыннан өткен құрылғылар саны екіден кем емес».

1.2. Оқиғалар арасындағы амалдардың келесі қасиеттерін дәлелде:

а) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;   б) $A\cdot B + C = (A+C)\cdot(B+C)$.

1.3. A,B,C - кез келген оқиғалар болсын. Келесі оқиғаларды өрнекте:

а) A,B,C оқиғаларының тым болмағанда біреуі пайда болуын;

б) не A оқиғасы, не B оқиғасы, не C оқиғасы орындалатын, бірақ B және C оқиғалары бірге орындалмайтын оқиғаны.

1.4. $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})$ оқиғасы жалған оқиға екенін дәлелде.

1.5. Ықшамда: $A\cdot(\overline{B}+C)\cdot(A+B)(A+\overline{C})$

1.6. Мына теңдіктер қандай жағдайда орындалады:

а) $A+B=A$;   б) $A+B=AB$?

1.7. A,B,C - кез келген оқиғалар болсын. Төмендегі теңдіктердің қайсысы дұрыс, қайсысы дұрыс емес:

а) $A\cdot\left(\overline{B+C}\right)=A\cdot\overline{B}+A\cdot\overline{C}$;   б) $A\cdot B\cdot C=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$.

1.8. Дәлелде: $A+B+C=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$

1.9. Мына теңдіктер қандай жағдайда орындалады:

а) $A\cdot B=A$;   б) $A+B=B$?

1.10. Дәлелде: $A\cdot\overline{B}=A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$

1.11. Ықшамда: $C\cdot(\overline{B}+C)\cdot(A+B)(B+\overline{C})$

1.12. Дәлелде: $(B+C)\cdot(B+\overline{C})\cdot(\overline{B}+C)=BC$

1.13. A,B,C - кез келген оқиғалар болсын. Келесі оқиғаларды өрнекте:

а) бұл оқиғалардың тым болмағанда біреуінің пайда болуын;

б) бұл оқиғалардың тек біреуінің пайда болуын.

1.14. A оқиғасы - алынған үш бұйымның тым болмағанда біреуі жарамсыз, B оқиғасы - алынған үш бұйымның барлығы жарамды деген оқиғалар болса, төмендегі оқиғалар нені сипаттайды:

а) $A\cdot B$ б) $A+B$

1.15. Ықшамда: $C\cdot(\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{B})(B+\overline{C})$

1.16. A және $\overline{A+B}$ оқиғалары үйлесімді ме? A, $\overline{A}\cdot B$, $\overline{A+B}$ оқиғалары оқиғалардың толық тобын құрайтынын дәлелде.

1.17. $(A+\overline{B})(\overline{A}+B)+(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ және $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+\overline{B})$ оқиғалары ақиқат екенін дәлелде.

1.18. Ықшамда: $(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+B)(AB+A)$

1.19. Егер $A \cdot B = A$ болса, онда $\overline{B} \cdot \overline{A} = B$ екенін дәлелде.

1.20. Құрылғы бірінші типті екі топтамадан және екінші типті үш топтамадан тұрады. A_i оқиғасы – «бірінші типті i-ші топтама бұзылмаған», мұндағы $i = 1,2$, $B_k\,(k = 1,2,3)$ – «екінші типті k- ші топтама бұзылмаған» деген оқиғалар. Құрылғы бұзылмайды, егер бірінші типті топтаманың тым болмағанда біреуі бұзылмаса және екінші типті топтаманың екіден кем емесі бұзылмаса. C – «құрылғы бұзылған жоқ» деген оқиғаны A_i және B_k арқылы өрнекте.

1.21. Егер $A \subset B$ болса, онда $A \cup (B \setminus A)$ оқиғасы нені сипаттайды?

1.22. Дәлелде:

а) $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A + B$; б) $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$.

1.23. Ықшамда: $(A + B) \cdot (\overline{A} + C)(\overline{C} + \overline{B})$

1.24. A, B, C - кез келген оқиғалар болсын. Келесі оқиғаларды өрнекте:

а) A, B, C оқиғаларының тек біреуі пайда болуын;

б) тым болмағанда бір оқиғаның пайда болуын, бірақ екіден артық емес.

1.25. Дәлелде:

а) $\overline{A} = B \cdot \overline{A} + \overline{B} \cdot \overline{A}$; б) $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

1.26. A, B, C- кез келген оқиғалар болсын. Төмендегі теңдіктердің қайсысы дұрыс, қайсысы дұрыс емес:

а)$(A + B + C) - C = A + B$; б) $\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

1.27. $A + B$, $\overline{A} + B$, $A + C$, $\overline{B} + \overline{C}$ оқиғалары үйлесімді болуы үшін қандай шарт қажет?

1.28. A оқиғасы өзара үйлесімсіз толық топ құратын $B_1, B_2, \ldots, B_n$ оқиғаларының тек біреуі пайда болғанда орындалатын оқиға болсын. Дәлелде: $A = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \ldots A \cdot B_n$.

1.29. Оқиғалар арасындағы амалдардың келесі қасиеттерін дәлелде:

а) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; б) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

1.30. A, B, C оқиғалары – кездейсоқ оқиғалар. Келесі теңдіктердің мағынасын түсіндір:

а) $A \cdot B \cdot C = B$; б) $A + B + C = B$.

1.31. Егер A және B оқиғалары үйлесімсіз оқиғалар болса, $(A + \overline{B}) \cdot (A + C) \cdot (A + \overline{C})$ оқиғасы нені анықтайды?

Есеп 2.

2.1. Әртүрлі төрт цифрдан тұратын барлығы қанша автомобиль нөмірлері бар?

2.2. Футбол жарысына 18 команда қатысты. Егер кез келген команда бір медаль ала алатын болса, алтын, күміс және қола медальдарды барлығы қанша әдіспен үлестіруге болады?

2.3. 0,1,2,3,4,5,6 цифрларынан әрбір цифр құрамында бір рет қана кезігетіндей барлығы қанша жұп үш таңбалы сандар құрастыруға болады?

2.4. Сауықтыру орнына әртүрлі екі жолдаманы алты адамға барлығы қанша әдіспен үлестіруге болады?

2.5. Беске қалдықсыз бөлінетін алты таңбалы қанша сан бар?

2.6. Жеті жас мамандарды 3 цехқа неше тәсілмен жіберуге болады, егер әрбір цехқа сәйкесінше 1 маман, 2 маман, 4 маман жіберілу керек болса?

2.7. Дөңес 12-көпбұрыштың барлық диагональдар саны қанша?

2.8. Бірде-бір цифры қайталанбайтын жеті орынды телефон нөмірлерінің саны қанша?

2.9. Әр топта сәйкесінше 2,3,5 адам болатындай 10 адамды неше тәсілмен 3 топқа бөлуге болады?

2.10. 1,2,3,4,5,6,7,8,9 цифрларын тек бір рет қана қолдана отырып, құрамында 5 цифры болатын барлығы қанша алты таңбалы сан құрастыруға болады?

2.11. 8 жолаушысы бар лифт алты қабатқа тоқтайды. Жолаушылар 1,3 және 4 жолаушыдан топталып қабаттарда түседі. Әр қабатта тек бір ғана топ түсуі қажет болса, мұндай жағдайлардың барлық саны қанша?

2.12. 1,2,3,4,5 цифрларынан әр цифр құрамында бір рет қана кезігетін барлығы қанша бес таңбалы сандар құрастыруға болады? Осылардың ішінде беске еселі еместер саны қанша?

2.13. 20 студенттің ішінен барлығы неше тәсілмен староста, комсорг және профорг сайлауға болады?

2.14. 1,5,6,7 цифрларынан барлығы қанша төрт таңбалы сандар құрастыруға болады?

2.15. 10 оқулық - 7-еуінің авторлары әртүрлі және бір автордың 3-томдық оқулығы – кітап сөресіне орналастырылған. Бір автордың 3-томдық оқулықтары қатар тұратындай етіп, бұл оқулықтарды барлығы қанша тәсілмен кітап сөресіне қоюға болады?

2.16. Екі цифры да жұп сан болатын барлық екі таңбалы сандардың саны қанша?

2.17. Барлығы қанша диагоналі бар:

а) дөңес төртбұрыш;

б) дөңес n- бұрыш?

2.18. Солдан оңға қарай және керісінше оқығанда бірдей оқылатын қанша бестаңбалы сандар бар?

2.19. 8 ер адам мен 8 әйел адамды дөңгелек үстелді айналдыра, бірде-бір екі ер адам мен екі әйел қатар отырмайтындай етіп неше тәсілмен отырғызуға болады?

2.20. Екі математик пен 10 экономисттен сегіз адамнан тұратын комиссия мүшелерін сайлау қажет. Құрамында тым болмағанда бір математик болатын комиссияны неше тәсілмен сайлауға болады?

2.21. Сегіз әртүрлі хатты сегіз әртүрлі конвертке неше тәсілмен салуға болады, егер бір конвертке тек бір ғана хат салынатын болса?

2.22. Авторлары әртүрлі 6 оқулықты кітап сөресіне неше тәсілмен орналастыруға болады?

2.23. Ондығы мен бірлігі әртүрлі және тақ сандар болатын екі таңбалы сандардың саны қанша?

2.24. Салтанаттың математикадан 7 әртүрлі оқулығы, ал Жанардың философиядан әртүрлі 9 оқулығы бар. Қанша тәсілмен 5 кітаптан кітаптарды алмастыра алады?

2.25. 1,3,4,5,7,9 цифрларынан әр цифр құрамында бір рет қана кезігетіндей барлығы қанша жұп алты таңбалы сандар құрастыруға болады?

2.26. 7 ер адам мен 4 әйел адамнан құрамындағы әйел адамдар саны екіден кем емес болатын алты адамды қанша тәсілмен алуға болады?

2.27. 15 адамды біреуінде 4 адам, екіншісінде 11 адам болатындай етіп екі топқа неше тәсілмен бөлуге болады?

2.28. Екі цифры да 0,2,4,8 цифрларынан құралған барлық екі таңбалы сандардың саны қанша?

2.29. Теміржол вагонындағы купеде әрқайсысында төрт орыннан бар екі диван қарама-қарсы қойылған. 8 жолаушының үшеуі қозғалыс бағытына беті қарайтындай, екеуі қозғалыс бағытына арқасымен қарайтындай отырғылары келеді. Жолаушылардың талаптары орындалатындай етіп, оларды неше тәсілмен орналастыруға болады?

2.30. 8 жолаушыны 3 купеге неше тәсілмен орналастыруға болады?

2.31. Құрамында екі цифры төрт рет және бес цифры екі рет кезігетін барлық әртүрлі алты таңбалы сандардың саны қанша?

Есеп 3.

3.1. Бір кітап сөресіне 10 оқулық кездейсоқ қойылған. Белгіленген үш кітаптың қатар орналасу ықтималдығын есептеу керек.

3.2. Телефон нөмірі бес цифрдан тұрады. Кездейсоқ терілген телефон нөмірінің құрамында бірдей цифрлар болмау ықтималдығын есепте.

3.3. Жәшікте 4 ақ және 5 қызыл шарлар бар. Жәшіктен бір-бірден барлық шарлар кездейсоқ алынып, қарамай жерге қойылады. Соңғы алынған шардың ақ болу ықтималдығын есепте?

3.4. 1, 3, 5, 6 және 8 цифрлары бір-бірден бес карточкаға жазылған. Жақсылап араластырылғаннан кейін, кездойсоқ алынған ретпен қойылды. Пайда болған бес таңбалы санның жұп сан болу ықтималдығын есепте.

3.5. Ойын сүйегі екі рет лақтырылған. Түскен ұпайлардың қосындысы 8-ден кем емес және 11-ден артық емес болу ықтималдығын есепте.

3.6. Топ 4 ер адам мен 8 әйел адамнан тұрады. Кездейсоқ үш-үштен топтағанда әр топта ер адам болу ықтималдығы неге тең?

3.7. Сегіз карточкада 1-ден 8-ге дейінгі цифрлар жазылған. Кездейсоқ екі карточка алынды. Осы карточкада шыққан санның цифрларының қосындысы 12-ден кем емес болу ықтималдығын есепте.

3.8. Алматы қаласындағы кездейсоқ алынған автомобильдің төрт нөмірінің барлық цифрлары әртүрлі болу ықтималдығы қандай?

3.9. 21 етихан билетінің әрқайсысында екі сұрақтан бар және сұрақтар қайталанбаған. Студент оның 20-ның ғана жауабын біледі. Емтиханда келген билеттің екеуі де студент білетін сұрақтан болу ықтималдығын тап.

3.10. Байланыс торабынан орыс алфавитінің 30 әрпін кездейсоқ береді. Лентада «МИНСК» сөзінің шығу ықтималдығы неге тең?

3.11. Доминоның толық жиынтығынан (28 дана) кездейсоқ 7 сүйек алынды. Олардың үшеуінде алты ұпайының болу ықтималдығын табу керек.

3.12. Жөндеу орнына 8 теледидар әкелінді, оның үшеуі күрделі жөндеуді қажет етеді. Жөндеуге кездейсоқ алынған 5 теледидардың екеуі күрделі жөндеуді қажет ететін теледидар болу ықтималдығын тап.

3.13. Төрт томдық шығарма кітап сөресіне кездейсоқ қойылған. Шығарманың солдан оңға қарай немесе оңнан солға қарай ретімен қатарласып орналасу ықтималдығын тап.

3.14. Цехта 6 ер адам және 4 әйел адам жұмыс істейді. Кездейсоқ алынған 8 адамның 3-еуі әйел адам болу ықтималдығы неге тең?

3.15. Партиядағы 1000 заттың 10-ы жарамсыз заттар. Кездейсоқ алынған 100 заттың ішінде 8 жарамсыз зат болу ықтималдығын есепте.

3.16. Стол үстінде 18 емтихан билеті жатыр және олар 1, 2,...,18 болып нөмірленген. Оқытушы кездейсоқ алған 3 билеттің барлығы да алғашқы төрттіктен болу ықтималдығын есепте.

3.17. Кітап сөресіне 20 кітап кездейсоқ қойылған және олардың арасында Абайдың үш томдығы да бар. Осы үш томдықтардың солдан оңға қарай өсу ретімен орналасу ықтималдығы қандай (үш томдықтардың қатар орналасуы міндетті емес)?

3.18. 8 адамнан тұратын топ дөңгелек столға кездейсоқ отырды. Қандай да бір белгілі екі адамның қатар отыру ықтималдығын есепте.

3.19. Он карточкаға 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 цифрлары жазылған. Кездейсоқ екі карточка алынып, алыну реті бойынша пайда болған сан оқылады. Осы санның жұп болу ықтималдығын есепте.

3.20. Екі ойын сүйегі лақтырылған. Түскен ұпайлардың қосындысы 10-нан артық емес болу ықтималдығын тап.

3.21. Топтың бес студенті – ағылшын тілін, алты студенті – неміс тілін және жеті студент – француз тілін оқиды. Кездейсоқ алынған төрт студенттің екеуі – ағылшын тілін, біреуі – француз тілін және біреуі –неміс тілін меңгеру ықтималдығы неге тең?

3.22. Студент 30 емтихан сұрағының 20-сының жауабын біледі. Емтиханда қойылған екі сұрақтың да оның білетін сұрақтары болу ықтималдығы неге тең?

3.23. Кездейсоқ екі таңбалы сан алынды. Осы санның цифрларының қосындысы жай сан болу ықтималдығын тап.

3.24. Үлкен қаладағы кездейсоқ алынған автомобильдің төрт нөмірінің барлық цифрлары әртүрлі болу ықтималдығы қандай? Барлық төрт цифры да бірдей болу ықтималдығы қандай?

3.25. Жәшікте үш ақ, бес қара және төрт қызыл шарлар бар. Жәшіктен бір-бірлеп барлық шарлар алынды. Қызыл шардың ақ шардан бұрын шығу ықтималдығы неге тең?

3.26. Алматы қаласының телефон нөмірі – алты цифрдан тұрады. Осы цифрлардың барлығы әртүрлі болу ықтималдығын тап.

3.27. Кітап сөресіндегі 15 оқулықтың 7-еуі математика пәнінен. Кездейсоқ алынған үш оқулықтың 3-еуі де математика пәнінің оқулығы болу ықтималдығын табу керек.

3.28. Үлкен қалада кездейсоқ алынған автомобильдің төрт таңбалы нөмірінің барлық цифры әртүрлі болу ықтималдығын есептеу керек. Барлық цифры бірдей болу ықтималдығы неге тең?

3.29. Дөңгелек үстелді айнала 4 ер адам мен 4 әйел адам отыр. Егер олар отырған орындарын кездейсоқ таңдаған болса, онда бірде-бір екі ер адам мен екі әйел адамның қатар отырмау ықтималдығын тап.

3.30. Жәшікте 2 ақ және 4 қара шарлар бар. Кездейсоқ жәшіктен барлық шарлар екі-екіден кезекпен алынды. Соңғы алынған шар жұбының екеуі де қара болу ықтималдығын тап?

3.31. Оқу бағдарламасының студент 20 сұрағының 15-інің жауабын біледі. Емтихан кезінде кездейсоқ алынған үш сұраққа жауап беру қажет. Емтиханда студенттің сұрақтарға жауап бере алу ықтималдығын тап?

Есеп 4. k- қабатты үйдің тасымалдау лифтісіне n жүргінші келіп отырды. ($n<k$). Екінші қабаттан бастап әрбір жүргінші басқаларынан өзгеше бірдей ықтималдықпен кез – келген қабаттан шыға алады. Төмендегі ықтималдықтарды табыңыз: а) әрқайсысы әртүрлі қабатта шықты; б) кемінде екеуі бір қабатта шықты.

Есеп 5. Бірлік ұзындықты кесіндіде кездейсоқ бір нүкте пайда болады. Осы нүктеден кесіндінің ұштарына дейінгі қашықтық $\frac{1}{k}$- дан артық болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 6. Екі адам T_1 сағат пен T_2 сағат аралығында кезігуге келісті. Олардың біреуі екіншісін 10 минут тосады да, одан кейін жүре береді. Ал екіншісі t минут тосады да, одан кейін жүре береді. Егер олардың кезігуге келулері бір-біріне тәуелсіз болса, онда олардың:
1) кезігу ықтималдығын;
2) кезікпеу ықтималдығын
есептеңіз.

Есеп 7. Радиусы R - ге тең дөңгелекте кездейсоқ бір нүкте пайда болды. Аудандары S_1 және S_2 болатын өзара қиылыспайтын екі фигураның бірде-біреуіне келіп түспеуінің ықтималдығын табыңыз.

Есеп 8. Екі топта сәйкесінше k_1 және k_2% үлгерімі төмен студенттер бар. Әр топтан кездейсоқ бір-бір студенттен алынды. Алынған студенттердің:

1)біреуі үлгерімі төмен студент болу;

2)тым болмағанда біреуі үлгерімі төмен студенттің болу;

3)екеуі үлгерімі төмен студент болу

ықтималдықтары неге тең?

Есеп 9. Нысанаға оқты дәл тигізу ықтималдығы бірінші атқыш үшін p_1 - ге тең, ал екіншісі үшін - p_2. Бірінші атқыш n_1 рет атыс, екінші атқыш n_2 рет атыс жүргізді. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын есепте:

1)бірде-бір оқ нысанаға тиген жоқ;

2) тым болмағанда бір оқ нысанаға тиді.

Есеп 10. A және B екі ойыншы кезекпен тиын лақтырды. Кімге бірінші «ел таңба» жағы түссе, сол ойыншы жеңіске жетеді. Бірінші ойынды A ойыншысы бастаса, екінші – B, үшінші – A және т.б.Келесі оқиғалардың ықтималдықтарын есепте:

1)A ойыншы k-ші лақтырысқа дейін жеңіске жетті;

Нұсқа 6-10, 26-31. A ойыншы k-ші лақтырыстан кеш емес лақтырыста жеңіске жетті;

Нұсқа 11-15. B ойыншы k-ші лақтырысқа дейін жеңіске жетті;

Нұсқа 16-20. A ойыншы k-ші лақтырыстан кеш емес лақтырыста жеңіске жетті.

2)Әрбір ойыншы үшін ойынның ұзаққа созылу жағдайында ықтималдықты табыңыз.

Есеп 11. Қорапта 1 –ден М –ге дейін нөмірленген М шарлар бар. Олар бір – бірден қайтарусыз алынады. Төмендегі оқиғалардың ықтималдықтарын табыңыз:

1) $A-$алынған шарлар нөмірлері өсу ретімен 1,2, …, М тізбегін құрайды;

2) B – кем дегенде бір рет алынған шардың нөмірі мен реттік нөмірі сәйкес келеді;

3) C – бірде – бір рет алынған шардың нөмірі мен реттік нөмірі сәйкес келмейді;

Есеп 12. 1000 шамның n_i шамы i-партиясынан алынған. $i=1,2,3,\sum_{i=1}^{3} n_i = 1000$. 1-партияда 6%, 2-партияда 5%, 3-партияда 4% сапасыз шамдар бар болса, онда кездейсоқ таңдап алынған бір шам сапасыз болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 13. Бірінші партияда N_1 стандартты және M_1 стандартты емес детальдар бар, ал екінші жәшікте N_2 стандартты және M_2 стандартты емес детальдар бар. Бірінші партиядан екіншісіне K деталь салынды. Екінші партиядан кездейсоқ алынған бір детальдың стандартты болу ықтималдығын табыңыз.

Есеп 14. Альбомда k таза және l сөндірілген маркалар бар. Олардан кездейсоқ m маркалар алынды (олардың ішінде таза да, сөндірілген маркалар болуы мүмкін), олардың барлығы сөндіріліп, қайтадан альбомға салынды. Қайтадан альбомнан кездейсоқ n маркалар таңдап алынды. Кездейсоқ таңдап алынған n маркалардың таза болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 15. Дүкенге үш зауыттан бірдей типті бұйымдар келіп түсті, әрбір i-зауыттан сәйкесінше m_i% бұйым келеді. (i = 1, 2, 3). Ал әрбір i-зауыттан сәйкесінше n_i% бірінші сортты бұйымдар бар. Бір бұйым сатып алынды. Сатып алынған бұйымның бірінші сортты және j зауытта шығарылған бұйым болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 16. Тиын «ел таңба» жағы *n* рет түскенше лақтырылады. «Сан» жағының *m* рет түсу жағдайының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 17. Бір лотерея билетінде ұтыс болуының ықтималдығы *p* ға тең. *n* билет сатып алынды. Ұтысы бар билеттер саны үшін ең ықтимал санды анықтап және оған сәйкес ықтималдықты есептеңіз.

Есеп 18. Әрбір лотерея билетіне үлкен ұтыс түсуі ықтималдығы p_1 – ге тең, ал лотерея билетіне ұсақ ұтыс түсуі ықтималдығы - p_2, лотерея билетіне ұтыс түспеуі ықтималдығы - p_3 және $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$. *n* билет сатып алынды. Сатып алынған билет ішінде n_1 үлкен ұтыс және n_2 ұсақ ұтыс болуының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 19. Телефон стансасында әрбір телефон соғу кезінде «жүйеге қосылмау» ықтималдығы *p* ға тең. *n* телефон соғуы келіп түскен болса, онда *m* рет «жүйеге қосылмау» шартының ықтималдығын табыңыз.

Есеп 20. Қандай да бір *A* оқиғасының әрбір *n* тәуелсіз сынақта орындалу ықтималдығы *p*-ға тең. Оқиғаның орындалуы *m* төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратындай ықтималдықтарын табыңыз:

1) Осы *A* оқиғасының k_1-ден кем емес, k_2-ден артық емес рет пайда болу ықтималдығын есепте

2) Осы *A* оқиғасының k_1-ден кем емес рет пайда болу ықтималдығын есепте

3) Осы *A* оқиғасының k_2-ден артық емес рет пайда болу ықтималдығын есепте.

Есеп 21.

1; 16, 31 нұсқалар үшін: Құрылғы тәуелсіз жұмыс істейтін *k* элементтен тұрады. Әрбір элементтің бір сынақта істен шығу ықтималдығы *p*-ға тең болса, сынақ жүргізу кезінде істен шыққан элементтер санының үлестірім заңын жаз, ықтималдықтың үлестірім функциясын құр және оның графигін тұрғыз. X – сынақ кезіндегі істен шыққан элементтер саны болса, осы X шамасының математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

2; 17 нұсқалар үшін: Зауыт қоймаға *k* сапалы бұйым жіберді. Тасымалдау кезінде бір бұйымның бұзылып, сапасыз болып қалу ықтималдығы 0,2. X дегеніміз - алынған *k* бұйымның ішіндегі сапасыз бұйымдар саны болса, осы X шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

3; 18 нұсқалар үшін: X дегеніміз –атылған *k* оқтың нысанаға тию саны болсын. Әрбір оқтың нысанаға тию ықтималдықтары бірдей және 0,2-ге тең болса, осы X шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

4; 19 нұсқалар үшін: *k* шыны құмыраны тасымалдау кезінде бір құмыраның сыну ықтималдығы 0,1-ге тең. X дегеніміз - *k* шыны құмыраның ішіндегі сынған құмыралар саны болса, осы X шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

5; 20 нұсқалар үшін: Кестеде лабораториялық жануардың қатарынан 12 күнде өлшенген салмақ өлшемі m (граммен) берілген:

m	50+k	52-k	48+k	50+k	51+k	53-k	47+k	50+k	52+k	48+k	49+k	51-k

Осы мәндермен құрылған уақыт қатарын стационарлы деп алып, осы қатардың математикалық күтімін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын, модасын мен медианасын есепте.

6; 21 нұсқалар үшін: Бидайдың дәндерінің ішінде 0,4 % арамшөп дәндері бар. X дегеніміз – кездейсоқ алынған k бидай дәндерінің ішіндегі арамшөп дәндерінің саны болса, осы X шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

7; 22 нұсқалар үшін: k тәуелсіз сынақ жүргізілген және олардың әрқайсысында А оқиғасының пайда болу ықтималдығы 0,1- ге тең. X дегеніміз – жүргізілген k тәуелсіз сынақта А оқиғасының пайда болу саны болса, осы X шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

8; 23 нұсқалар үшін: Тиын k рет лақтырылған. Кездейсоқ герб жағының түсу санының ықтималдығының үлестірім кестесін жаз және үлестірім көпбұрышын сал. Герб жағының түсу санының математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

9; 24 нұсқалар үшін: Бір рет лақтырылғанда ойын сүйегінің жоғарғы жағында кездейсоқ пайда болған ұпай санының ықтималдығының үлестірім кестесін құр.

10; 25 нұсқалар үшін: Қандай да бір маршрутқа бір күнде k ұшақ ұшады. Әрбір ұшақтың кесте бойынша қону ықтималдығы 0,7-ге тең. X дегеніміз – кестеден ауытқыған ұшақтардың кездейсоқ саны болса, осы X шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

11; 26 нұсқалар үшін: Лапта ойынының ойыншысы 5 рет допты соғады. Бір рет соққанда доптың лаптаға түсу ықтималдықтары бірдей және 0,6-ға тең. X дегеніміз – доптың лаптаға түсу саны болса, осы X шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте. Үлестірім заңын қолданып, $P(2 \leq X \leq 3) = 10p^2q^2$ екенін көрсет.

12; 27 нұсқалар үшін: Театрға n билет бар, оның k – сы бірінші қатардағы орынның билеттері. X дегеніміз – кездейсоқ алынған m билеттің ішіндегі бірінші қатардағы орынның билеттері саны болса, осы X шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте. Алынған кестені пайдаланып, $P(X < 3)$ тап.

13; 28 нұсқалар үшін: n лотерея билетінің ішіндегі ұтыс билеттерінің саны – k. X дегеніміз – сатып алынған m билеттің ішіндегі ұтыс билеттерінің саны болса, осы X шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

14; 29 нұсқалар үшін: 1-ден *n*-ге дейін бүтін сандармен нөмірленген *n* жетонның ішінен кездейсоқ *k* жетон алынды. *X* дегеніміз – осы алынған жетондардың ішіндегі 5-ке еселі нөмірлі жетондар саны болса, *X* шамасының үлестірім заңын жаз, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын есепте.

15, 30 нұсқалар үшін: Бес тәуелсіз жұмыс істейтін аспаптан тұратын құрылғы сынақтан өткізіледі. Аспаптардың істен шығу ықтималдықтары сәйкесінше 0,05, 0,06, 0,08, 0,09, 1. Осы мәндерден құралған уақыт қатарының стационарлы екенін ескеріп, оның математикалық күтімін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын, модасы мен медианасын есепте.

Есеп 22.

$2n-1$ **нұсқалары үшін (тақ нөмірлі нұсқалар).** Бірінші мергеннің әрбір атқанда оқты нысанаға тигізу ықтималдығы тұрақты және p_i-ге тең , ал екінші мергеннің әрбір атқанда оқты нысанаға тигізу ықтималдығы тұрақты және p_2-ге тең. Екі мерген нысанаға бір-біріне тәуелсіз *k* оқ атты. *X* дегеніміз – осы атылған оқтардың ішіндегі бірінші және екінші мергеннің нысанаға тиген оқтарының қосындысы болса, оның математикалық күтімін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын, модасы мен медианасын есепте.

$2n$ **нұсқалары үшін (жұп нөмірлі нұсқалар).** Ақ құтыда 10 зат бар, оның 7-еуі боялған. Ал көк құтыда 7 зат бар, оның 5-еуі боялған. Кездейсоқ екі құтыдан *k* зат алынды. *X* дегеніміз – осы екі құтыдан алынған заттардың ішіндегі боялған заттар саны болса, оның математикалық күтімін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын, модасы мен медианасын есепте.

Есеп 23. Кездейсоқ шаманың берілген үлестіру заңдылығы бойынша $\phi(t)$ сипаттамалық функциясын, *M(X)* математикалық күтімін, *D(X)* дисперсиясын барлық жағдай үшін табу керек:

1) биномдық заң: $P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0<p<1, \quad k=0,1,2,...n$

2) Паскаль заңы: $P(X=k)=\dfrac{\alpha^k}{(1+\alpha)^{k+1}}, \quad \alpha>1, \quad k=0,1,2,...$

3) Пуассон заңы: $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad \alpha>0, \quad k=0,1,2,...$

Есеп 24. *X* кездейсоқ шамасының $f(x)$ үлестірім тығыздығы берілген. γ параметрін, *M(X)* математикалық күтімін, *D(X)* дисперсиясын, *X* кездейсоқ шамасының үлестіру функциясын, $x_1 < X < x_2$ теңсіздігі орындалу ықтималдығын барлық жағдай үшін табу керек:

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\gamma-a}, x\in[a,b] \\ 0, x\notin[a,b] \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} a, x\in[\gamma,] \\ 0, x\notin[\gamma,b] \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} a, x\in\left[\dfrac{b-\gamma}{2},\dfrac{b+\gamma}{2}\right],\\ 0, x\notin\left[\dfrac{b-\gamma}{2},\dfrac{b+\gamma}{2}\right]\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} ax, x\in[0,a]\\ 0, x\notin[0,a]\end{cases}$

$2n-1$ **нұсқалары үшін (тақ нөмірлі нұсқалар).** Шапшаң дабыл соғу оқиғасы k_1 және k_2 сағаттар аралығында орындалуы қажет. Дабылды тосу уақыты бірқалыпты үлестірілген X кездейсоқ шамасы. k сағаттан кейін m мин бойы дабылдың соғылу ықтималдығын есептеңіз. X шамасының математикалық күтімін, дисперсиясын, орташа квадраттық ауытқуын, модасы мен медианасын табу керек.

$2n$ **нұсқалары үшін (жұп нөмірлі нұсқалар).** Метро пойызы қатаң кесте бойынша m минут сайын жүреді. X дегеніміз – кездейсоқ перронға келген жолаушының бірқалыпты үлестірілген пойызды тосу уақыты болса, осы X шамасының үлестірім тығыздығын, интегралдық функциясын, математикалық күтімін, дисперсиясын, модасы мен медианасын табу керек.

Есеп 25. X кездейсоқ шамасының үлестірім тығыздығымен берілген: $f(x)=\gamma\, e^{ax^2+bx+c}$. γ параметрін, *M(X)* математикалық күтімін, *D(X)* дисперсиясын, X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын, $x_1<X<x_2$ теңсіздігі орындалу ықтималдығын табыңыз.

Есеп 26. $\lambda>0$ параметрімен X кездейсоқ шамасы үлестірім тығыздығымен берілген: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x\ge 0,\\ 0, x<0.\end{cases}$. *M(X)* математикалық күтімін, *D(X)* дисперсиясын, X кездейсоқ шамасының үлестірім функциясын, $x_1<X<x_2$ теңсіздігі орындалу ықтималдығын табыңыз.

Есеп 27. X кездейсоқ шаманың берілген үлестіру заңдылығы бойынша $\phi(t)$ сипаттамалық функциясын және 2) үшін X кездейсоқ шаманың *M(X)* математикалық күтімін, *D(X)* дисперсиясын табыңыз:

1) X кездейсоқ шамасы $[a;b]$ кесіндісінде бірқалыпты үлестірілген;

2) X кездейсоқ шамасы үлестірім тығыздығымен берілген**:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^b}{\Gamma(b)}x^{b-1}e^{-ax}, x>0\\ \\ 0, x\le 0\end{cases}\qquad (a>0, b>0),$$

3) X кездейсоқ шамасы $M(X)=a$ және $D(X)=b$ параметрлерімен қалыпты үлестірілген.

Есеп 28. Чебышев теңсіздігін қолданып, X кездейсоқ шамасының $M(X)$ математикалық күтімінен ауытқуы $N\sigma$-дан кем емес, мұндағы $\sigma = \sqrt{D(X)}$ - X кездейсоқ шамасының орташа квадраттық ауытқуы; $D(X)$ – дисперсиясы; N - нұсқа нөмірі.

Есеп 29. X_i кездейсоқ шамасы бірдей ықтималдықпен i^{α} или $-i^{\alpha}$ мәндерінің бірін қабылдайды. $X_1, X_2 ...., X_i ,...$ қос-қостан тәуелсіз кездейсоқ шамалар тізбегі үлкен сандар заңын қанағаттандырады ма:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < X\right\} = 1, \quad \varepsilon > 0\ ?$$

α параметрінің екі мәні үшін есепті шығарыңыз. α_1 , α_2 .

Есеп 30. $[0, \alpha]$ кесіндісінен кездейсоқ n сан таңдап алынған, нақтырақ айтсақ, $[0, \alpha]$ кесіндісінде бірқалыпты үлестірілген n тәуелсіз кездейсоқ шамалар $X_1, X_2 ...., X_n$ берілсін. Олардың қосындысы x_1 және x_2 мәндерінің аралығында орналасқан болуының ықтималдығын табыңыз: $P\left\{x_1 < \sum_{i=1}^{n} X_i < x_2\right\}$.

Есеп 31. X кездейсоқ шамасының $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ Пуассон заңымен үлестірілгендігі белгілі. λ параметрі белгісіз болады. Нүктелік бағаларды алу әдісін қолданып, λ белгісіз параметрінің (x_1, x_2,... x_8) таңдама мәндерін ескергеннен кейін a^* бағасын табу керек:

1)моменттер әдісімен;

2)неғұрлым шындыққа ұқсас әдіспен.

Есеп 32. X кездейсоқ шамасы p белгісіз параметрімен $P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ биномдық үлестірілген. Нүктелік бағалаудың әдістерін қолданып, p белгісіз параметрінің (x_1, x_2,... x_8) таңдама мәндерін ескергеннен кейін p^* бағасын табу керек.

Есеп 33. ξ кездейсоқ шамасының a белгісіз математикалық күтімі мен σ^2 белгілі дисперсиясымен қалыпты үлестірілген. Көлемі n болатын $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таңдамалар бойынша $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$ таңдамалық орташа есептелген. γ сенімділік ықтималдығына сәйкес a белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалын табыңыз.

Есеп 34. X кездейсоқ шамасының a белгісіз математикалық күтімі мен σ^2 дисперсиясымен қалыпты үлестірілген. Көлемі n болатын $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ таңдамалар бойынша $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$ таңдамалық орташа және $(\sigma^2)^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ белгісіз параметрлі бағалары есептелген. γ сенімділік ықтималдығына сәйкес a белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалын табыңыз.

Есеп 35. n сынақтың нәтижесінде қалыпты кездейсоқ шаманың дисперсиясы үшін жылжымаған бағасы алынған. γ сенімділік ықтималдығына сәйкес a белгісіз параметрінің үлестіруінің сенімділік интервалын табыңыз.

Есеп 36. Нысанаға n рет атыс жүргізгенде m рет оқтың тигені бақыланған. $\gamma = 0{,}95$ сенімділік ықтималдығы берілсе, онда нысанаға тию p ықтималдығының сенімділік интервалын табыңыз.

Есеп 37. n сынақтың нәтижесінде A оқиғасы бірде-бір рет орындалмады. $P(A)$ ықтималдығының жоғарғы сенімділік шекарасы p_1 берілсе, жүргізілген n сынақтың санын табыңыз. Сенімділік ықтималдығын $\gamma = 0{,}95$ деп ал.

Есеп 38. Конвейерден жиналған 200 түйін бақылауға алынған. m_i түйіндер саны және i оны жинауға кеткен операциялар саны кестеде көрсетілген:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	Барлығы
m_i	1	2	5	2	6	8	4	2	200

Пуассон үлестірімінің нәтижесімен алынған нәтижелер α маңыздылық деңгейінде χ^2 критерийі үшін сәйкес келеді ме? $P(X = i) = \dfrac{\lambda^i}{i\,!} e^{-\lambda}$, (мұндағы X - босатылған операциялардың кездейсоқ саны). a берілген параметрі үшін есепті шешу керек.

Есеп 39. Көлемі $n = 15$ берілген таңдама бойынша таңдамалық дисперсия $\overline{S^2}$ есептелген. α=0,02 маңыздылық деңгейі берілген. Статистиканың мәнін есептей отырып, H_0: $\sigma^2 = a$ болжамын H_1: $\sigma^2 > a$ үшін тексер, , мұндағы σ^2 –бас дисперсия. Қорытынды жаса.

Ескерту. χ^2 статистикасын қолдан.

Есеп 40. Екі таңдамалық жинақтың таңдамалық орташасы мен дисперсиясы, таңдама көлемі мен маңыздылық деңгейі берілген: $\overline{x_1}$; $\overline{S^2{}_1}$; $n_1=15$; $\overline{x_2}$, $\overline{S^2{}_2}$; $n_2=15$; $\alpha=0{,}01$.

Статистиканың мәнін есептей отырып, H_0: $\delta=0$ болжамын H_1: $\delta<0$ үшін тексер, мұндағы δ - бас жинақтың математикалық күтімдерінің айырмасы. Қорытынды жаса.

Ескерту. Стьюденттің Т-статистикасын қолдан.

Есеп 41. Екі таңдамалық жинақтың таңдамалық дисперсиясы, таңдама көлемі және маңыздылық деңгейі берілген: S_1^2, $n_1=15$, S_2^2, $n_2=15$, $\alpha=0{,}01$.

Статистиканың мәнін есептей отырып, H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ болжамын H_1 : $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ үшін тексер, мұндағы σ_1^2 және σ_2^2 – бас жинақтың дисперсиялары. Қорытынды жаса.

Ескерту. Фишердің F-статистикасын қолдан.

5 ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

5.1 Негізгі әдебиеттер

1 Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей (задачи и упражнения). М., 1973.
2 Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев, 1979.
3 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., 1998.
4 Гнеденко Б.В. Курс теории вероятности. М., 1969.
5 Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л.,1967.
6 Чудесенко В.Ф. «Сборник заданий по специальным курсам высшей математики», М., 1983

5.2 Қосымша әдебиеттер

1. Хисамиев Н.Г., Тыныбекова С.Д., Конырханова А.А. Математика. 2 том, Өскемен, 2006.
2. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1982.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1975.
4. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М., 1963.
5. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1979.
6. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова. М., 1965.
7. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. М., 1980.
8. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. М., 1972.
9. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. М., 1982.
10. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1998.